

『九章算術』 訳注[†] 稿 (4)

大 川 俊 隆

中国古算書研究会

大川 俊隆、小寺 裕、角谷 常子、田村 三郎

田村 誠、馬場 理恵子、張替 俊夫、矢崎 武人、吉村 昌之

Translation and Annotation of “The Nine Chapters
on the Mathematical Art (九章算術)” Vol. 4

OHKAWA Toshitaka

Abstract

"The Nine Chapters on the Mathematical Art" was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of "Suan-shu shu." The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu-Hui (劉徽) and Li Chunfeng (李淳風) from the viewpoint of our previous work on "Suan-shu shu."

This is the fourth article based on our research and results, in which we studied problems 33 to 38 of Chapter 1, Fangtian (方田).

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成させることを目的としている。

[†]This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (20500879).

平成20年10月31日 原稿受理

大阪産業大学 教養部

本論文では、方田章の算題 (33) ~ (38) に対する訳注を与える。

[三三] 今有宛田、下周三十歩、徑十六歩。問爲田幾何。荅曰、一百二十歩。

[三四] 又有宛田、下周九十九歩、徑五十一歩。問爲田幾何。荅曰、五畝六十二歩四分歩之一。

術曰、以徑乘周、四而一^[48]。

訓読：[三三] 今、宛田⁽¹⁴⁰⁾ 有り、下周三十歩、「徑」⁽¹⁴¹⁾ 十六歩。問う、田を爲すこと幾何ぞ。

答に曰う、一百二十歩。

[三四] 又、宛田有り、下周九十九歩、「徑」五十一歩。問う、田を爲すこと幾何ぞ。

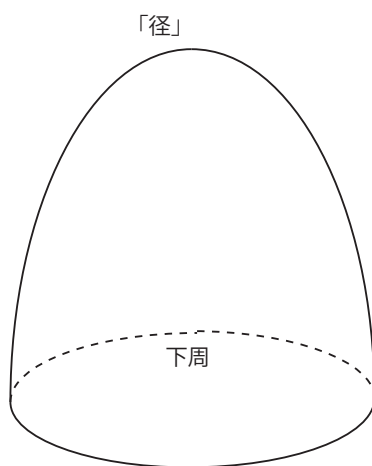
答えに曰う、五畝六十二歩四分歩の一。

術に曰う、「徑」を以て周に乘じ、四にして一とす。

注：(140) 李籍云う、「畹当作宛。字之誤也。宛田者、中央隆高。爾雅曰「宛中、宛邱」。

又曰「邱上有邱爲宛邱」。皆中央隆高之義也。『爾雅』は両者とも「積丘」。李繼閔云う「その形は土堆・丘陵・墓塚の如くして、後世これを「丘田」と俗称している」。この形は球の一部とみなす者もいるが、我々は、単に丘のように隆起した形とみなす。(図1参照)。

(141) この「徑」は、宛田における直径の両端と頂点を結ぶ最短線のこと。直径の義ではないので、以下「徑」と表記する。



宛田

図1

訳：[三三] 今、宛田が有り、下周30歩、「径」16歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答えにいう、120平方歩。

[三四] 又、宛田が有り、下周99歩、「径」51歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答えにいう、5畝 $62\frac{1}{4}$ 平方歩。

術にいう、「径」を周長に掛けて、4で割る。

[48] [劉注] 此術不驗。故推方錐以見其形。假令方錐下方六尺、高四尺。四尺爲股、下方之半三尺爲句、正面邪爲弦、弦五尺也。令句(股)[弦]相乘、四因之、得六十尺。即方錐四面見者之冪。若令其中容圓錐、圓錐見冪與方錐見冪、其率猶方冪之與圓冪也。按、方錐下六尺、則方周二十四尺。以五尺乘而半之、則亦方錐之見冪。故求圓錐之數、折徑以乘下周之半、即圓錐之冪也。今宛田上徑圓穹、而與圓錐同術、則冪失之於少矣。然其術難用。故畧舉大較、施之大廣田也。求圓錐之冪、猶求圓田之冪也。今用兩全相乘。故以四爲法、除之、亦如圓田矣。開立圓術說圓方諸率甚備。可以驗此。

校訂：[一]郭書春云う、「[股]は「[弦]」字の誤り」と。

[二]郭書春は、「四」字は必要なしと云うが、あった方が分かりやすい。

訓読：此の術は験せず⁽¹⁴²⁾。故に方錐を推して以て其の形を見わさん。仮に方錐をして下方六尺、高さ四尺たらしむ。四尺を股と為し、下方の半、三尺を句と為し、正面の邪(斜)を弦と為せば、弦は五尺也⁽¹⁴³⁾。句・弦をして相乗せしめ、四之に因れば、六十尺を得⁽¹⁴⁴⁾。即ち方錐四面の見者の冪⁽¹⁴⁵⁾なり。若し其中をして円錐を容れしむれば、円錐の見冪と方錐の見冪とは、其の率猶お方冪と円冪のごとき也⁽¹⁴⁶⁾。按ずるに、方錐の下六尺なれば、則ち方の周二十四尺。五尺を以て乗じて之を半にすれば、則ち亦た方錐の見冪なり。故に円錐の数を求むるや、「径」を折りて以て下周の半に乗ずれば、即ち円錐の冪也⁽¹⁴⁷⁾。今、宛田上の「径」は円穹⁽¹⁴⁸⁾、而して円錐と術を同じくすれば、則ち冪は之を少なきに失す⁽¹⁴⁹⁾。然れども其の術用い難し。故に大較⁽¹⁵⁰⁾を略挙し、之を大広の田⁽¹⁵¹⁾に施す也。円錐の冪を求むるは、猶お円田の冪を求むるのごとき也。今、兩全⁽¹⁵²⁾を用いて相乗ず。故に四を以て法と為し、之を除すること、亦円田の如し。開立円の術に円・方の諸率を説くこと甚だ備れり⁽¹⁵³⁾。以て此れを験すべし。

注：(142) 「[径]を以て周に乘じ、四にして一とす」という術が実際の検証と合わない、ということ。

(143) 図2のように、△THKを考えると、これは直角三角形であるので、股(高さ)4尺と句3尺から弦は5尺となる。

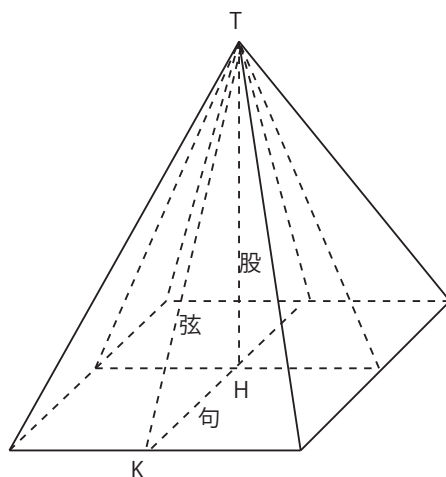


図 2

- (144) 「四因之」の「因」とは、掛けるということ。よって、「四因之」とは、これに四を掛けるということ。
- (145) この「見」は現れるの義で、「見者の冪」とは外に現れていない底面を除く、方錐の側面積のこと。下では、「見冪」と略されて用いられている。
- (146) ℓ を上の弦の長さとし、 r を句の長さとする、方錐の側面積は、 $4 \times \frac{1}{2} \times 2r \times \ell = 4\ell r$ 。円錐の側面積は、 $\pi \ell r$ 。よってその比率は、 $4 : \pi$ 。方錐の底面積は $4r^2$ 。円錐の底面積は πr^2 。よって、その比率は $4 : \pi$ となり、方錐と円錐の側面積の比率と同じになる。
- (147) ここの「径」は、宛田の「径」と同様、円錐の下周の一点から円錐の頂点を通して円錐の下周に至る長さをいう（母線の2倍となる）。これを「折る」とは、頂点で半分にすること（母線の長さとなる）。これを「下周の半に乗ず」とは、すぐ上の方錐の側面積を出すのと同じ計算法を用いて円錐の側面積を出しているのである。と同時に、宛田の術の「「径」を以て周に乘じ、四にして一とす」と同じ計算法になっている。よって、ここから、円錐と宛田の面積の比較となる。
- (148) 「宛田上の「径」」は、李繼閔は、「宛田の上径」と読む。ここでも「径」は上注の「径」と同意で解する。「穹」はアーチ型、よって「円穹」は、宛田の上の「径」が円弧状のアーチ型をしているということ。
- (149) 図3のように、宛田の「径」は円弧状のアーチ型をしているので、直線である円錐の側面線より長い。よって、その面積も円錐の側面より多くなる。もし、宛田の面積を円錐の側面積として計算すれば、当然少なすぎることになる、ということ。

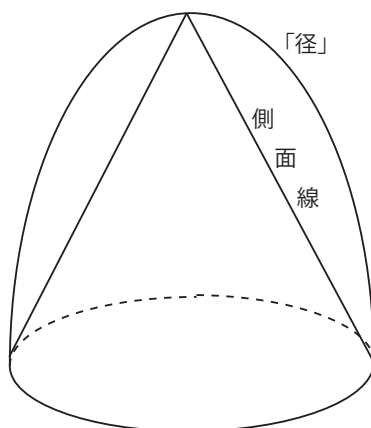


図3

(150) 「較」は、比較の義。「円田術」の劉注では「周三なる者は、其の六觚に従うの環のみ。以て円規(と觚)の多少の覚(較)を推せば、乃ち弓と弦也」と「覚」字が用いられている。「大較」とは、おおまかな比較の意。

(151) 「大広の田」は、李繼閔の訳では「界域広闊的土地」とする。

(152) 「両全」は、全周と全「径」の意で、宛田の下周と「径」を指す。円田術では、「半周・半径相乗ず」と、円周と直径を各々最初に半分になっているが、ここでは、下周と「径」は半分にしていないので、それらを併せて「両全」と呼んでいる。

(153) 少広章「開立円術」の劉注「爲術者蓋依周三徑一之率。令円冪居方冪四分之三。圓困居立方亦四分之三。更令圓困爲方率十二、爲丸率九、丸居圓困又四分之三也」云々。

訳：この術は検証ができない。そこで、方錐より推測してその形を表してみよう。仮に方錐を、底の正方形の1辺を6尺とし高さ4尺とする。4尺を股となし、底の正方形1辺の半分、3尺を句とし、側面の中線を弦とすると、弦は5尺となる。句と弦を互いに掛けあわせて、之を4倍すると、60平方尺が得られる。即ち、これが方錐の現れている4面の面積(側面積)である。もしもその中に、円錐を内接させると、円錐の側面積と方錐の側面積は、その比率が方錐の底面積と円錐の底面積の比となる。按ずるに、方錐の下辺が6尺なので、その周は24尺となる。これに弦の5尺を掛けて半分になると、また方錐の側面積となる。ゆえに、円錐の側面積の数値を求める場合には、円錐の「径」を半分にして(即ち、円錐の側面線の長さとなったものに下底の円周の半分に掛けると、それがまた円錐の側面積となる。(これが、宛田の術にいう「径」を以て周に乘じ、四にして一とす)と同じ計算法となる)。

今、宛田上の「径」は、円弧状のアーチ型であり、しかるに(宛田の面積を求めるのに)、

円錐の面積と同じ術を用いると、その面積は少なすぎることになる。しかし、その術は用い難いので、おおまかな比較のあらましを示して、広大な土地の測量に用いるのである。

円錐の面積を求めるのは、円田の面積を求めるのと同じである。(円田の術で「半周・半径相乗ず」るのと同様、)今、宛田の術では(下周と「径」という)二つの「全」(全周と全「径」)を用いて互いに掛け合わせている。ゆえに、四を法として、掛け合わせたものを割ってやるのは、また円田(の又術「周径相乗じて、四にして一とす」)と同じである。

開立円術(の私の注の中)で、円と方の諸率をはなはだ詳しく説いておいた。それでこのことを検証できよう。

[三五]今有弧田、弦三十歩、矢十五歩。問爲田幾何。答曰、一畝九十七歩半。

[三六]又有弧田、弦七十八歩二分歩之一、矢十三歩九分歩之七。問爲田幾何。答曰、二畝一百五十五歩八十一分歩之五十六。

術曰、以弦乘矢、矢又自乗、并之、二而一 [49]。

訓読：[三五] 今、弧田有り⁽¹⁵⁴⁾、弦三十歩、矢十五歩。問う、田を爲すこと幾何ぞ。答に曰う、一畝九十七歩半。

[三六] 又、弧田有り、弦七十八歩二分歩の一、矢十三歩九分歩の七。問う、田を爲すこと幾何ぞ。答に曰う、二畝一百五十五歩八十一分歩の五十六。

術に曰う、弦を以て矢に乘じ、矢又自ら乘じ、之を并せて、二にして一とす。

注：(154) 李籍云う、「弧田者、有弧有矢、如弧之形」。「弧田」は弓形の田。

訳：[三五] 今、弧田が有り、弦が30歩、矢が15歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答にいう、1畝 $97\frac{1}{2}$ 平方歩。

[三六] また、弧田が有り、弦が $78\frac{1}{2}$ 歩、矢が $13\frac{7}{9}$ 歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答にいう、2畝 $155\frac{56}{81}$ 平方歩。

術にいう、弦を矢に掛けて、矢はまた自乗する。両者を并せて、半分にする。

[49] [劉注] 方中之圓、圓裏十二觚之冪、合外方之冪四分之三也。(方)中 [方] [一]合外方之半、則朱・青 [一]合外方四分之一也。弧田、半圓之冪也。故依半圓之體而爲之術。以弦乘矢而半之則爲黃冪、矢自乗而半之爲二青冪。青・黃相連爲弧體。弧體法當應規、(令弧而)

〔今弧面〕^{〔三〕}不至外畔、失之於少矣。圓田舊術以周三徑一爲率、俱得十二觚之冪、亦失之於少也。與此相似、指驗半圓之冪耳^{〔四〕}。若不滿半圓者、益復疎闊。宜依句股鋸圓材之術、以弧弦爲鋸道長、以矢爲句深、而求其徑。既知圓徑、則弧可割分也。割之者、半弧田之弦以爲股、其矢爲句、爲之求弦、即小弧之弦也。以半小弧之弦爲句、半圓徑爲弦、爲之求股、以減半徑、其餘即小弦^{〔五〕}之矢也。割之又割、使至極細。但舉弦・矢相乘之數、則必近密率矣。然於算數差繁、必欲有所尋究也。若但度田、取其大數、舊術爲約耳。

校訂：〔一〕李潢云う、「方中」当作「中方」と。文意より、「中方」、即ち内接正方形でなければならない。

〔二〕「朱・青」は聚珍版・四庫本に「朱實」に作る。郭書春云う「朱實」於下文無用、而下文之「青冪」、此未提及、文氣不相連貫」云々。今、郭氏に従う。

〔三〕「令弧而」は文脈からみて「今弧面」の誤りであろう。ただし、郭書春はこれを「今觚面」に作るべしとする。

〔四〕「半圓之弧」は文脈より見て「半圓之冪」の誤りであろう。

〔五〕郭書春云う、「李潢が「弦」を「弧」に作り、錢校本はこれに従っているが、変える必要はないようだ」と。

訓読：方中の円にして、円裏十二觚の冪⁽¹⁵⁵⁾は、外方の冪の四分の三に合する也⁽¹⁵⁶⁾。中方は外方の半に合すれば、則ち朱・青は外方の四分の一に合する也⁽¹⁵⁷⁾。弧田は半円の冪也。故に半円の体に依りて之の術を為す⁽¹⁵⁸⁾。弦を以て矢に乗じて之を半にすれば則ち黄冪と為し、矢自乗して之を半にすれば二青冪と為す⁽¹⁵⁹⁾。青・黄相連なりて弧の体を為す。弧の体、法当に規に應ずべきに、今弧面外畔に至らざれば、之を少なきに失す⁽¹⁶⁰⁾。円田の旧術は「周三徑一」を以て率と為し、俱に十二觚の冪を得れば、亦た之を少なきに失する也。此れと相似て、指は半円の冪を驗するのみ⁽¹⁶¹⁾。若し半円に満たざる者は、疎闊を益復す⁽¹⁶²⁾。宜しく句股の「鋸圓材」の術⁽¹⁶³⁾に依り、弧弦を以て鋸道の長さとして、矢を以て句の深さとして、而して其の徑を求むべし⁽¹⁶⁴⁾。既に円徑を知れば、則ち弧割分すべき也。之を割れば、弧田の弦を半にして以て股と為し、其の矢を句と為し、之を為して弦を求むれば、即ち小弧の弦也⁽¹⁶⁵⁾。以て小弧の弦を半にして句と為し、円徑を半にして弦と為し、之を為して股を求め、以て半徑より減ずれば、其の余は即ち小弦の矢也⁽¹⁶⁶⁾。之を割り又割り、極細に至らしむ。但だ弦・矢相乗するの数を挙げれば、則ち必ず密率に近づく。然らば算の数において差や繁なるも、必ず尋究する所有らんと欲する也。若し但だ田を度り^{はか}、其の大数を取るには、旧術を約と為すのみ。

注：(155)本注以下は、図4によって考えてゆく。「方中の円」とは、正方形に内接する円のこと。

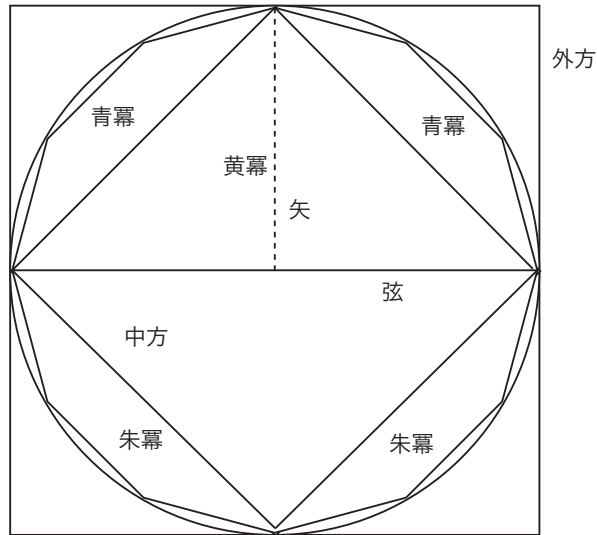


図4

- (156) 上の正12角形の面積が、外の正方形の $\frac{3}{4}$ となること。[44]の劉注参照。
- (157) 上の円に内接する正方形を考えると、それは、外の正方形の面積の半分となるので、「朱・青」は、正12角形より内接正方形の面積を引いた残りの部分。外接正方形の面積をAとすると、正12角形の面積 $S_{12}=\frac{3}{4}A$ 。内接正方形の面積は $\frac{1}{2}A$ 。よって、朱・青 = $\frac{3}{4}A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{4}A$ 。よって、「朱・青は外方の四分の一に合する也」となる。
- (158) 弧田術の「弦を以て矢に乘じ、矢又自乗して、之を併せて、二にして一とす」は、弧田の面積を半円とみなして考えている。[三五]の問題は、弦30歩、矢15歩であるので、丁度直径30歩の円の半分である。
- (159) 半円として考えると、「黄霧」は、弦（直径）と矢（半径）を掛けた半分であるから、図4で示された三角形の部分。上の注(157)から、朱・青が $\frac{1}{4}A$ だから、「青霧」は $\frac{1}{4}A$ の半分、即ち、矢（半径）を自乗したものの半分となる。よって、「黄霧」と「青霧」を併せた半円（弧田）の面積は、「弦を以て矢に乘じ、矢又自乗して、之を併せて、二にして一とす」で求められる、ということ。
- (160) 「黄霧」と「青霧」の部分を合わせると、正12角形の半分の形になるので、これを「弧形」とは呼ばず、「弧体」と呼んだのであろう。弧田の術の計算法では、あくまで「弧体」が求まるだけで、弧田の面積は求めることができないと劉徽は云っているのであろう。また「弧面」とは「弧体の面」の略と考える。「弧体の面」とは上述の正12角形の一辺のこと。
- (161) 円周率を3とする円田術では、正12角形の面積を得たが、これでは実際の円の面積には足りなかった。同様に、[三五]題の弧田は半円であり、その面積として正12角形

の面積の半分を計算しているにすぎない、との意。

(162) 李繼閔は「益復、作更加解。疏闊、不周密」とし、「若し半円より小さい弓形的面積を計算するには、この算法は更にはいいかげんさを加えてしまう」と解する。

(163) 句股章の[九]「今有円材、埋在壁中、不知大小。以鋸鋸之、深一寸、鋸道長一尺。問、徑幾何」を指す。

(164) 句股章の[九]には、「術曰、半鋸道自乗、如深寸而一、以深寸増之、即材徑」とある。計算は、 $\left(\frac{\text{弦長}}{2}\right)^2 \div \text{矢長} + \text{矢長} = \text{円径}$ となる。

(165) 図5のように、弧田の弦(大弦)・弦の矢(大矢)・小弧の弦(小弦)・小弦の矢(小矢)を定めると、小弦を求める計算は、 $\sqrt{\left(\frac{\text{大弦}}{2}\right)^2 + \text{大矢}^2}$ となる。

(166) 小矢を求める計算は、半径 - $\sqrt{\text{半径}^2 - \left(\frac{\text{小弦}}{2}\right)^2}$ となる。

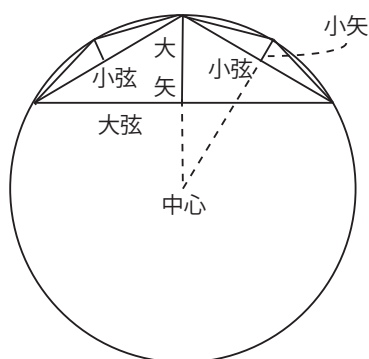


図5

訳: 正方形に内接する円に対して、その円に内接する正12角形の面積は外接正方形の面積の $\frac{3}{4}$ に合致する。内接正方形の面積は、外接正方形の面積の $\frac{1}{2}$ に合致するので、朱・青の面積は外接正方形の $\frac{1}{4}$ に合致する。([三五]では) 弧田は半円の面積である。ゆえに、半円の体に基づいてこの術をなしているのである。弦の長さを矢の長さに掛けてこれを半分にすると「黄冪」となり、矢の長さを自乗してこれを半分にすると「青冪」二つとなる。「青冪」と「黄冪」が相連なって、弧の体をなしている。弧の体については、その計算法が円に対応すべきであるが、今、弧体(正12角形の半分)の辺は円の外周には至っていないので、面積は少ないことになる。円田の旧術は「周三・径一」を率としており、俱に正12角形の面積を得ているだけで、またその面積は実際の円より少ないことになる。これと同様に、術が指しているものは半円の面積を検証したものにすぎない。

若し半円に満たない弧田であったなら、その大まかさは益々広がる。句股章の「円

材を鋸ぎる」術によって、弧の弦の長さを「鋸道」の長さとし、矢の長さを「句の深さ」として、その円弧の直径を求めるべきである。円の直径が分かれば、弧は分割できる。これを分割すれば、弧田の弦を半分にしこれを股とし、その矢を句として、これから弦を求めると、その弦は小弧の弦となる。小弧の弦を半分にしてこれを句とし、円の直径を半分にしてこれを弦とし、これより股を求めて、それを半径から引くと、その余りが小弦の矢となる。これをさらに分割し続けると、極細の数値にまで至る。ただ弦と矢の相乗の数値を挙げてゆくと、必ず密率に近づくのである。そうすると、算の数値はやや複雑にはなるが、必ず尋究すべきものがあるであろう。若しただ田を測り、そのおおよその数を計算するのであれば、旧術は簡便である。

[三七]今有環田、中周九十二步、外周一百二十二步、徑五步^{[50][51]}。問爲田幾何。答曰、二畝五十五步^{[52][53]}。

[三八]又有環田、中周六十二步四分步之三、外周一百一十三步二分步之一、徑十二步三分步之二^{[54][55]}。問爲田幾何。答曰、四畝一百五十六步四分步之一^{[56][57]}。術曰、并中・外周而半之、以徑乘之爲積步^[58]。

密率術曰^[一]、置^[二]中・外周步數、分母^[三]・子各居其下。母互乘子、通全步、内分子。以中周減外周、餘半之、[以益中周]^[四]。徑亦通分内子、以乘周爲[密]^[五]實。分母相乘爲法。除之爲積步、餘、積步之分。以畝法除之、即畝數也^[59]。

校訂：[一]「密率術曰」の「密率」の2字について。郭書春のように、「密率」も含めて、以下の文を『九章』の本文とする説もあるが、そもそも「密率」という語は劉徽以降用いられる用語（「円田」の[40]劉注参照）であるので、これを『九章』の本文とはみなし難い。よって、次の3説が考えられる。①「密率」の2字だけを削って、「術曰」以下の文を『九章』の本文とする。②「密率術曰」以下の文を李淳風が作り、その下の[59]の劉注も彼がつくったとする。③「密率術曰」以下の文は劉徽が作り、その注も作ったとする。以上の3説のうち、どれを正解とするかは現在のところ確定しがたい。よって、そのまま訳しておく。

[二]「置」は、校証本は「并」としている。しかし、郭氏の云うように「置」のままが良い。

[三]「母」字を郭書春は「必要ないようである」とするが、[59]の劉注に「分母・子置於下」としているのがあった方がよい。

[四]郭氏は、聚珍本、四庫本に従って、この句を入れる。

[五]郭氏は、前の「密率術」と呼応して、ここの「密」字はあるべしとするが、聚珍本他の諸本には無い字であるので、削除して訳する。

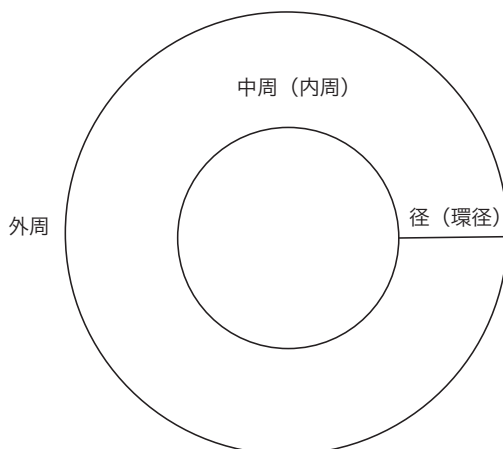
訓読：[三七] 今、環田⁽¹⁶⁷⁾ 有り、中周⁽¹⁶⁸⁾ 九十二歩、外周一百二十二歩、径五歩。問う、田を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、二畝五十五歩。

[三八] 又、環田有り、中周六十二歩四分歩の三、外周一百一十三歩二分歩の一、径十二歩三分歩の二。問う、田を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、四畝一百五十六歩四分歩の一。

術に曰う、中・外周を并(併)せて之を半にし、径⁽¹⁶⁹⁾を以て之に乗じて積歩⁽¹⁷⁰⁾と為す。

密率術に曰う、中・外周の歩数を置き、分母・子は各々其の下に居く。母互いに子に乘じ、全歩を通じ、分子に内(納)る。中周を以て外周より減じ、余りは之を半にし、以て中周に益す。径も亦た分を通じ子に内(納)れ、以て周⁽¹⁷¹⁾に乗じて実と為す。分母相乗じて法と為す。之を除して積歩と為し、余は積歩の分たり。畝法を以て之を除せば、即ち畝の数也。

- 注：**(167) 李籍云う「環田者、有肉有好、如環之形。爾雅曰、肉好若一謂之環、或作環」。『爾雅』郭注云「肉、辺也。好、孔也」。また「肉好若一謂之環」に注して「辺・孔適等」。
- (168) 「中周」は、環田の内(=孔)の円周のこと、普通「内周」と呼ばれる。これに対して、環田の外(=肉)の円周を「外周」と呼ぶ。
- (169) 「径」は、ここでは、外周の半径より中周の半径を引いた差をいう。ここでは「環径」と呼んでおく(図6参照)。



環田
図6

(170) 「積歩」は、平方歩の単位で表される面積をいう(注(2)参照)。ここでやっている環田の面積を求める計算式は、 $\frac{1}{2}$ (外周+中周)×環径 であるから、畝に換算すれば、 $\frac{1}{2}(122+92) \times 5 = 535$ 平方歩 = 2畝55平方歩となり、答えと合う。

なお、この計算式が出てくる根拠は、図7のように、環田を細かく分割し、これらを交互に並べてゆくと、ほぼ、(外周+中周)÷2が縦、環径が横の長方形となるので、この面積が求められることになる。[三八]のように環田が一回りしていないものも、この方法で面積を出している。

(171) この「周」は、前の「中周を以て外周より減じ、余りは之を半にし、以て中周に益」したもの。上の注(170)の長方形の縦は、(外周+中周)÷2で求められるが、(外周-中周)÷2+中周 という計算でも求められるということ。

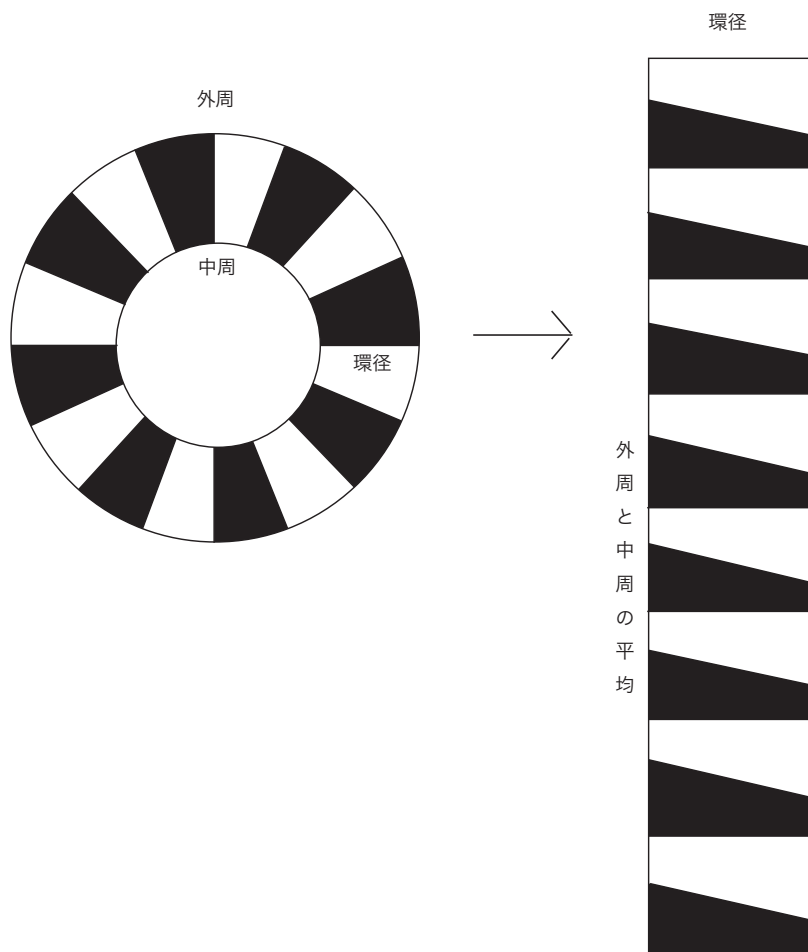


図7

訳：[三七] 今、環田が有り、中周が92歩、外周が122歩、環径が5歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答えにいう、2畝55平方歩。

[三八] 又、環田が有り、中周が $62\frac{3}{4}$ 歩、外周が $113\frac{1}{2}$ 歩、環径が $12\frac{2}{3}$ 歩である。問う、田の面積は如何ほどであるか。答えにいう、4畝 $156\frac{1}{4}$ 歩である。

術に曰う、中周の長さとお外周の長さを併せてこれを半分にし、環径をこれに掛けると積歩が出る。

密率の術に曰う、中周の長さとお外周の長さを置いて、分母・分子は各々その下に置く。分母は互いに分子に掛け、分数の全歩(歩数の整数部分)を通分して、分子に納れる。中周を外周から引いて、余りは半分にし、それを中周に加える。環径も通分してそれを分子に納れ、それを(先に中周とお外周を併せて、更にそれを半分にした)「周」に掛けて実とする。分母同士掛け合わせて法とする。実を法で割って積歩とし、余りは、積歩の分数部分となる。畝法(240平方歩)で積歩を割れば、畝数となる。

[50] [劉注] 此欲令與周三徑一之率相應。故言徑五歩也。據中・外周、以徽術言之、當徑四歩一百五十七分歩之一百二十二也。

訓読：此れ「周三・径一」の率と相応せしめんと欲す。故に「径五歩」と言う也。中・外周に抛り、徽の術を以て之を言え、當に径四歩一百五十七分歩の一百二十二たるべき也⁽¹⁷²⁾。

注：(172) 環径は、(外周-中周) ÷ 2πであるので、πを3とすると、環径は5となる。πを劉徽の率 $\frac{157}{50}$ で計算すると、

$$(122-92) \div (2 \times \frac{157}{50}) = 4\frac{122}{157}$$
 となる。

訳：この環径の数値は「周三・径一」の率と対応させようとしている。ゆえに「径5歩」と言っているのである。中周とお外周の数値から、私の術で計算すると、環径は $4\frac{122}{157}$ 歩になるべきである。

[51] 臣淳風等謹按、依密率、合徑四歩二十二分歩之十七。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、径は四歩二十二分歩の十七に合す⁽¹⁷³⁾。

注：(173) (外周-中周) ÷ 2πに、πの約率(李淳風の云う「密率」、注(84)参照) $\frac{22}{7}$ を代入すると、

$$(122-92) \div (2 \times \frac{22}{7}) = 4\frac{17}{22}$$
 となる。

訳：臣淳風等謹んで按じますに、密率に依れば、環径は $4\frac{17}{22}$ 歩に合致する。

[52] [劉注] 於徽術、當爲田二畝三十一歩一百五十七分歩之二十三。

訓読：徽の術においては、当に田二畝三十一歩一百五十七分歩の二十三と爲すべし⁽¹⁷⁴⁾。

注：(174) 環田の公式は、(中周+外周) ÷ 2 × 環径 であるので、上の環径 = $4\frac{122}{157}$ 歩を代入すると、

$$(92+122) \div 2 \times 4\frac{122}{157} = 511\frac{23}{157} \text{ 平方歩} = 2 \text{ 畝} 31\frac{23}{157} \text{ 平方歩}$$

となる。

訳：私の術においては、田 2 畝 $31\frac{23}{157}$ 平方歩とするべきである。

[53] 臣淳風等謹按、依密率、爲田二畝三十歩二十二分歩之十五。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、田二畝三十歩二十二分歩の十五と爲す⁽¹⁷⁵⁾。

注：(175) 公式、(中周+外周) ÷ 2 × 環径 に、環径 $4\frac{17}{22}$ 歩を代入すると、

$$(92+122) \div 2 \times 4\frac{17}{22} = 510\frac{15}{22} \text{ 平方歩} = 2 \text{ 畝} 30\frac{15}{22} \text{ 平方歩}$$

となる。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、密率によれば、田 2 畝 $30\frac{15}{22}$ 平方歩となる。

[54] [劉注] 此田環而不通匝。故徑十二歩三分歩之二。若據上周求徑者、此徑失之於多、過周三徑一之率。蓋爲疎矣。於徽術、當徑八歩六百二十八分歩之五十一。

訓読：此の田は環にして通匝せず⁽¹⁷⁶⁾。故に径十二歩三分歩の二。若し上の周に抛りて径を求むれば、此の径は之を多きに失し、「周三・径一」の率を過ぐ。蓋し疎と爲す。徽の術においては、当に径八歩六百二十八分歩の五十一たるべし⁽¹⁷⁷⁾。

注：(176) 「匝」は「市」にも作り、音ソウ(zā)、めぐりの義。「環にして通匝せず」とは、環状はなしているが、図8のように環が切れていて、グルッと一回りしていないこと。

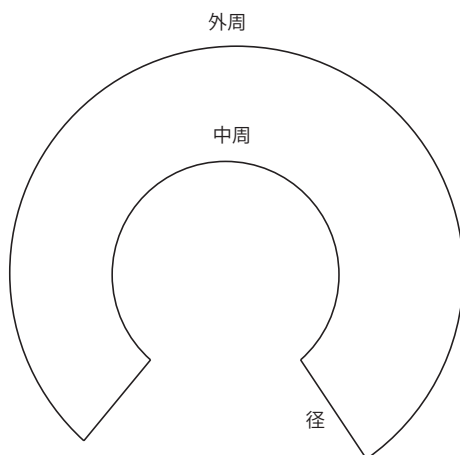


図8

(177) 外周の円の半径を R とし、内周の円の半径を r とすると、外周 $2\pi R = 113\frac{1}{2} = \frac{227}{2}$ 、内周 $2\pi r = 62\frac{3}{4} = \frac{251}{4}$ となるので、

$$\text{環径} = R - r = \left(\frac{227}{2} - \frac{251}{4}\right) \div 2\pi \text{となる。}$$

ここで、旧率 $\pi = 3$ を代入すると、環径は、 $\frac{203}{24} = 8\frac{11}{24}$ となる。(すぐ下の李注で計算結果が示されている)。

ここで、劉徽の率 $\pi = \frac{157}{50}$ を代入すると、環径は、 $8\frac{51}{628}$ となる。

いずれの値も、 $12\frac{2}{3}$ と大きく異なっているので、この環は閉じていないことが分かる。

訳：この田は、環状をなしてはいるが、一回りはしていない。ゆえに径が $12\frac{2}{3}$ 歩なのである。もし(一回りしていると仮定して)上の周の長さから径を求めると、この環径は多すぎることになり、「周三・径一」の率さえも越えている。そもそも粗でありすぎる。(一回りしていると仮定した場合)私の率では、環径は $8\frac{51}{628}$ 歩となるべきである。

[55]臣淳風等謹按、依周三徑一考之、合徑八步二十四分步之一十一。依密率、合徑八步一百七十六分步之一十三。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、「周三・径一」に依りて之を考うれば、径八步二十四分歩の一十一に合す⁽¹⁷⁸⁾。密率に依れば、径八步一百七十六分歩の一十三に合す⁽¹⁷⁹⁾。

注：(178) 上の注(177)参照。

$$(179) \text{環径} = R - r = \left(\frac{227}{2} - \frac{251}{4}\right) \div 2\pi \text{に約率の} \pi = \frac{22}{7} \text{を代入すると、} 8\frac{13}{176} \text{となる。}$$

訳：臣淳風等謹んで按じますに、「周三・径一」の旧率によってこれを考えると、その環

径は、 $8\frac{11}{24}$ 歩に合致する。密率によれば、環径 $8\frac{13}{176}$ 歩に合致する。

[56] [劉注] 於徽術、當爲田二畝二百三十二步五千二十四分步之七百八十七也。依周三徑一、爲田三畝二十五步六十四分步之二十五。

訓読：徽の術においては、當に田二畝二百三十二步五千二十四分步の七百八十七と爲すべき也⁽¹⁸⁰⁾。「周三・徑一」に依れば、田三畝二十五步六十四分步の二十五と爲す⁽¹⁸¹⁾。

注：(180) 以下の劉注は、環田が一回りしているという仮定の下で記されている。その面積の式は、(中周+外周) ÷ 2 × 環径であるので、中周・外周の値と劉注 [54] の環径 $8\frac{51}{628}$ 歩を代入すると、 $(\frac{251}{4} + \frac{227}{2}) \div 2 \times \frac{5075}{628} = \frac{3577875}{5024} = 712\frac{787}{5024}$ 平方歩となり、2畝 $232\frac{787}{5024}$ 平方歩となる。

(181) 上の注(180)の式に、旧率3によって計算した環径 $8\frac{11}{24}$ を代入すると、 $(\frac{251}{4} + \frac{227}{2}) \div 2 \times \frac{203}{24} = \frac{47705}{64} = 745\frac{25}{64}$ 平方歩、即ち、3畝 $25\frac{25}{64}$ 平方歩となる。

訳：(環田が一回りしていると仮定すると) 私の術によると、田2畝 $232\frac{787}{5024}$ 平方歩となすべきである。また、「周三・徑一」の率によれば、田3畝 $25\frac{25}{64}$ 平方歩となる。

[57] 臣淳風等謹按、密率、爲田二畝二百三十一歩一千四百八分步之七百一十七也。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率は、田二畝二百三十一歩一千四百八分歩の七百一十七と爲す也⁽¹⁸²⁾。

注：(182) 環田の面積の公式、(中周+外周) ÷ 2 × 環径 に約率で計算した環径 $8\frac{13}{176}$ 歩を代入すると、 $(\frac{251}{4} + \frac{227}{2}) \div 2 \times \frac{1426}{176} = \frac{1001805}{1408} = 711\frac{717}{1408}$ 平方歩となり、2畝 $231\frac{717}{1408}$ 平方歩となる。

訳：臣淳風等謹んで按じますに、(環田が一回りしていると仮定すると) 密率では、田2畝 $231\frac{717}{1408}$ 平方歩となる。

[58] [劉注] 此田截而中之周則爲長。并而半之者、亦以盈補虚也。此可令中外周各自爲圓田。以中圓減外圓、餘則環實也。

訓読：此の田截りて之の周を中にすれば則ち長さとなす⁽¹⁸³⁾。「并せて之を半にす」とは、亦た盈を以て虚を補う也⁽¹⁸⁴⁾。此れ中・外周をして各自円田となしむべし。中円を以て外円より減ずれば、余りは則ち環の実也⁽¹⁸⁵⁾。

注：(183) 郭書春云う「截而中之周」とは、中外の周を截って中平の周を得ることを云う。「截」は切断。環田を円の中心を通る多くの線分で切ることをいう。注(169)で述べたように、これによって多数の扇形ができるので、これを交互に並べてゆくと、ほぼ長方形とな

る。その長方形の「長」(縦)は、外周と中周を併せた長さの半分になる。

(184) 上の扇形を交互に並べると、ちょうど円弧の長い部分と短い部分が補い合う形になる。

(185) 「此可令」以下は、上の計算法とは別の法。外周を形成する円を外円とし、中周を形成する円を中円として、外円の面積より中円の面積を引けば、環田の面積となることをいう。

訳：この田は、(図7のように)切って(できた扇形を交互に並べて長方形とみなし)、2つの円周の平均をとると、縦の長さとなる。「併せて之を半にす」とは、また盈(余ったところ)で虚(足りないところ)を補っているのである。ここでは、中周と外周をそれぞれ円田として、中円の面積を外円の面積より引くと、余りが環田の実(円環として実際に残った部分)となる(という計算でも環田の面積は求められる)。

[59] [劉注] 按此術、并中・外周歩數於上、分母子於下。母互乘子者、爲中・外周俱有分、故以互乘齊其子。母相乘同其母。子齊母同、故通全歩、内分子。半之者、以盈補虚、得中平之周。周則爲従、徑則爲廣。故廣従相乘而得其積。既合分母、還須分母出之。故令周・徑分母相乘而連除之、即得積歩。不盡、以等數除之而命分。以畝法除積歩、得畝數也。

訓読：按ずるに、此の術は、中・外周の歩数を上に、分母・子を下に并(併)す⁽¹⁸⁶⁾。「母互いに子に乗ず」とは、中・外周俱に分有るが為の故に以て互いに乗じて其の子を「齊」す。母相乗じて其の母を「同」す⁽¹⁸⁷⁾。子は「齊」し、母は「同」す、故に全歩を通じ、分子に内(納)る⁽¹⁸⁸⁾。「之を半にす」とは、盈を以て虚を補い、中平の周を得。周は則ち従(縦)と爲し、徑は則ち広と爲す。故に広・従(縦)相乗じて其の積を得⁽¹⁸⁹⁾。既に分母を合すれば、還にさら須らく分母もて之を出だすべし⁽¹⁹⁰⁾。故に周・徑の分母をして相乗じて之を連除せしむれば⁽¹⁹¹⁾、即ち積歩を得。尽きざれば、等数を以て之を除して分に命ず⁽¹⁹²⁾。畝法を以て積歩を除せば、畝数を得る也⁽¹⁹³⁾。

注：(186) 以下の注では、中周 $62\frac{3}{4}$ 歩、外周 $113\frac{1}{2}$ 歩を用いて説明する。中周の62と外周の113は上で併せ、中周の $\frac{3}{4}$ と外周の $\frac{1}{2}$ は下で併せる。即ち、上では、 $62+113=175$ という計算を行い、下では、 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ という計算を行う。「上」「下」とは算木計算上の配置を述べたものであろう。

(187) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ という計算では、分母 $4 \times$ 分子 $1 +$ 分母 $2 \times$ 分子 $3 = 10$ という計算(分子を「齊」す)と、分母 $4 \times$ 分母 $2 = 8$ という計算(分母を「同」す)を行う。

(188) 次に、整数 $175 \times 8 = 1400$ を分子に納れて、 $1400+10 = 1410$ とする。これを半分にして705が得られ、よって、縦は、 $\frac{705}{8}$ となる。

- (189) 環径 $12\frac{2}{3}$ は仮分数にして、 $\frac{38}{3}$ とし、 $\frac{705}{8}$ と掛けると、その面積が得られる。
- (190)「既に分母を合す」とは、2つの分母を掛け合わせたこと。「分母もて之を出だす」とは、分子の方が大きい仮分数の形になっているので、分母で分子を割って、帯分数の整数部分を外へ出すこと。
- (191)「連除」とは、2数を掛け出てきた数を除数として割り算を行うこと。(「乗分の術」の劉注への注(60)参照)。「周」の分母8と環径の分母3を掛けて出てくる数24で、分子同士を掛けた $38 \times 705 = 26790$ を割ること。
- (192) 分母で分子を割って、割り切れなかったら、余りと分母を最大公約数で約してから、分数にする。26790を24で割れば、1116余り6となる。よって、余り6と分母24の最大公約数6で約して分数にすると、 $\frac{1}{4}$ となる。
- (193) 整数部分の1116平方歩は、畝法(240平方歩)で割れば、4畝156平方歩となる。

訳：按ずるに、この術は、中周と外周の歩数を上で、分母・分子を下で併せる。「母互いに子に乗ずる」というのは、中周・外周ともに(整数以外に)余りの分数があるため、よって分母と分子を互いに掛けて、それらの分子を「齊」にし、分母同士を掛けて、分母を「同」にする。分子は「齊」にし、分母は「同」にしたので、よって、全歩(整数部分)を通分して、分子に納れる。「これを半にす」とは、余った部分で足りない部分を補い、中平の周長(中周と外周を平均した周長)を得るためである。これによって、周長を縦とし、環径を横とする(長方形をつくる)。ゆえに、横と縦を掛け合わせてその面積を得るのである。分母を掛け合せたので、さらにその掛け合せた分母で分子(同士を掛け合せた数)を割って整数を外へ出さなければならない。ゆえに、中平の周長の分母と環径の分母を掛け合わせて出てくる数で、分子(同士を掛け合せた数)を割ると、積歩(平方歩単位の面積)が得られる。割り切れなときは、残りの数は、除数との最大公約数で割ってから(約分してから)分数にする。畝法(240平方歩)で積歩を割れば、畝数が得られる。

(以上、卷一「方田章」終わり)

参考文献

- 1) 李継閔『《九章算術》校証』(1993年9月)
- 2) 郭書春『匯校九章算術』(2004年8月)
- 3) 郭書春・劉鈍『算經十書』(1998年12月、遼寧教育出版社)、(2001年4月、九章出版社)
- 4) 川原秀城「劉徽註九章算術」(『中国天文学・数学集』所収、1980年11月)

- 5) 白尚恕『《九章算術》注釈』(1983年12月)
- 6) 沈康身『九章算術導読』(1997年2月)
- 7) 李繼閔『《九章算術》及其劉徽注研究』(1992年8月)
- 8) 李繼閔『《九章算術》導読与訳注』(1998年9月)
- 9) 李籍『九章算術音義』(叢書集成初編本『九章算術』所収)
- 10) 「九章算術補註」(李儼『中算史論叢』(三)、1935年12月)
- 11) 楊輝『詳解九章算法』(百部叢書集成本)
- 12) 李潢『九章算術細草図説』(嘉慶庚辰版本)
- 13) 清水達雄『九章算術』1~15(「数学セミナー」1975年2月号~1976年4月号)
- 14) 張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』-中国最古の数学書-』(朋友書店、2006年10月)
- 15) Shen, Kang-Shen; Crossley, John N; Lun, Anthony W. C. 『The Nine Chapters on the Mathematical Art : Companion and Commentary』(Oxford Univ Pr, 1999)
- 16) 大川俊隆『九章算術』訳注稿(1)大阪産業大学論集 人文・社会科学編2号(2008年2月)
- 17) 大川俊隆『九章算術』訳注稿(2)大阪産業大学論集 人文・社会科学編3号(2008年6月)
- 18) Chemla, Karine; Guo, Shuchun 『Les neuf chapitres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』(Dunod, 2004)
- 19) 大川俊隆『九章算術』訳注稿(3)大阪産業大学論集 人文・社会科学編4号(2008年10月)

