

關於《算數書》的四個算題^{註1}

(2004年8月在「《算數書》與先秦數學國際學術研討會」)

日本張家山漢簡《算數書》研究會

大川俊隆·張替俊夫·田村誠

2001年我們在日本大阪組織了「張家山漢簡《算數書》研究會」,在這個研究會是由秦漢史研究者·數學史研究者·數學研究者和古文字研究者共同構成的.其主要工作就是研究《算數書》.到目前為止,我們已發表的研究成果,是「張家山漢簡《算數書》譯注稿」(1)-(4).^{註2}「譯注稿」(5)和「張家山漢簡《算數書》「飲漆」解」這2編論稿也已經投稿,並即將刊行.^{註3}

今天我們三個人代表「《算數書》研究會」想從我們的研究成果之中選擇四個算題的問題,在這裡宣讀,並願意接受大家的批評.

宣讀之前,我們要講兩個問題;

第一點是對出土文字資料的基本態度的問題.秦簡·漢簡等都是橫跨2000餘年的時間出現到我們眼前的,所以解讀時當然常常碰到解釋不了的地方.這時候,我們往往以為「這個文字大概抄書者寫錯的」,受到這種誘惑的支配之後,就把這個文字改變成自己能了解的文字.我們對這種誘惑應該不斷作鬥爭.除了有明確的證據以外,絕對不應改文字.不能了解的部分呢,作為「存疑」留給後人去解決,這應是對出土文字資料的研究者的基本態度.

還有一個,關於算題的釋文,我們一定按照片圖版用自己的眼睛確定文字.這是在日本研究中國出土文字資料時務必遵守的原則.但是研究《算數書》的數學者大多數還沒注意這樣的原則,一直沿用前人所做的釋文.這樣,前人錯的地方永遠改不了,正確的解釋也永遠不能得出.

我們這個研究會是在得知張家山漢簡的照片圖版於2002年1月正式出版的消息之後纔組建的.

現在我們開始宣讀.

1. 「女織」題

「女織」題開頭的一文乍一看,不好理解的.

鄰里有女惡自喜也.織日自再,五日織五尺.

《九章算術》衰分章裡有一個算題跟這個算題相似.那個算題的相當部分如下;

今有女子善織,日自倍,五日織五尺.

郭書春先生按照《九章算術》的文句,主張「喜」是「善」之誤,然後斷句并改文如下:^{註4}

鄰里有女惡自善也.織,日自再,五日織五尺.

即使這樣改變,《算數書》的文句裡還有「惡」「自」「也」三個字,不好理解.^{註5}

我們不能同意他的變更.因此,為了沿著《算數書》的原文了解下去,我們查遍詞匯的例句,結果,終於找到了「自喜」的例句.

1. (董賢)為人美麗自喜.(《漢書》佞幸傳)

2. 孝景帝曰,魏其侯者,沾沾自喜,多易,難以爲相持重。(《史記》竇嬰傳)

在 2 的例句中看見的「沾沾自喜」這句話,現在也還使用,如「受到表揚,沾沾自喜」。按照這些例子,就明白了「自喜」是「自我滿足」的意思,所以原文可以翻成如下:

鄰村有一個女性,她厭惡「自我滿足」,(努力了織布技能的提高)。結果,她織布的數量每天比前日多一倍了,過了五天她織好了五尺的布。

只要了解這些,就不用改變原文,而且也不用做不合理的斷句。

《九章算術》裡有了類似的文句,這正是使人產生誤解的原因。

2. 「除」題

「除」題的開頭如下:

除,羨除,其定方丈高丈二尺,其除廣丈,袤三丈六尺,其一旁毋高,積三千三百六十尺。¹⁴¹

(「袤三丈六尺」的「六」是在原來的釋文裡釋作「九」的,可是看了照片圖版,明確是「六」字。)

如實看了上面的文章,就能明白,「羨除」這個立體是把叫「定」和「除」的兩個立體合起來而成的。「定」就是 10 尺平方而高度 12 尺的立體,「除」就是寬度 10 尺而長度 36 尺,高度不明,但從「其一旁毋高」的記述能知道,這個立體的一邊沒有高度。

從上面的已知條件來判斷,我們設想的立體如下:

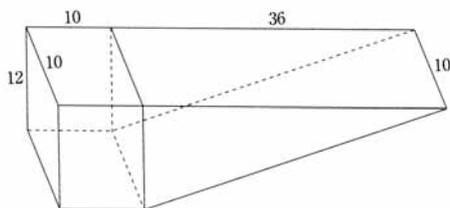


圖 3 羨除

基于這個設想運算其體積,結果是 3360 立方尺,和這個算題的答案正吻合。

彭浩先生根據《九章算術》商功章「羨除」題的記述,把上面圖右邊的立體看作「羨除」,然後求這個立體的體積(他把「三丈九尺」的「九」字還沒改成「六」字),得出了 2340 立方尺的答案。他按照這個數字改了《算數書》的數字。^{注6}可是,用如上所述的辦法來運算,就不用改原文的數字了。

問題在于《九章算術》商功章的「羨除」形和這個「除」題的「羨除」形不同一點。「羨除」有「傾斜的道路」的意思,所以原來這個詞匯有可能指著上面圖右邊的立體。後來還加了左邊的直方體(即「定」的部分)之後也被叫做「羨除」了。

《九章算術》商功章的「羨除」形就是在「除」題的「除」形兩邊再加著三角錐的。這樣的立體有可能是後代所演變的結果。

在中原發現的秦代墳墓之中有很多秦代中級貴族的墳墓,看了這些墳墓的發掘報告,^{注7}我們能確認,這些墳墓形和上圖的「羨除」完全是同一形,而且在規模上差不多一樣。如果這樣,我

們就知道,「除」這個算題就是秦代當建造墳墓時,爲了計算應該挖掘出來的土壤量而作出的。

3. 「飲漆」題

「飲漆」題的文句如下:

= (飲) 漆 (漆) = (漆) 一斗 = (飲) 水三斗而槃 (盤) = (飲) 水二斗七升即槃 (盤) 問餘
= (漆) 水各幾何曰餘 = (漆) 卅七分升卅餘水二升卅七分
升七●朮 (術) 曰以二斗七升者同一斗卅七也爲法有(又)直(置)廿七^L十升者各三之
爲實實如法而一

對這個文句我們加了句號和頓號如下:

飲漆。漆一斗飲水三斗而盤。(今漆一斗) 飲水二斗七升即盤。問、餘漆·水各
幾何。曰、餘)卅七分升卅。餘水二升卅七分升七。術曰、以二斗七升者同一斗、卅
七也、爲法。又置廿七·十升者、各三之爲實。實如法而一。

在上文中我們補上了「今漆一斗」4個字,因爲前面有「漆一斗」,所以抄寫人在這裡故意從略。這樣的省略在《算數書》裡常見。

這個算題讓很多研究者難以理解,有的研究者指出,可能有數字的錯誤。

可是,我們確信,漢簡《算數書》絕對不是不好抄本,而且是當時官吏們在處理實際業務(如納稅業務等)時親自使用的運算指南書。根據這樣的確信我們進行檢討,結果,得出了一個結論,就是:「漆一斗飲水三斗而盤」的「漆一斗」和「(今漆一斗) 飲水二斗七升即盤」的「漆一斗」是互相不同的。

問題就是「盤」這個詞匯的意思,爲了能理解這個詞匯的意思,給我們很大幫助的是彭浩先生這樣指出的:

「飲漆是往盛儲生漆的容器中注水、直至容器中生漆留下的最高痕跡」。注8

經過檢討,我們纔知道,這個「最高痕跡」意味著給漆把水加下去之後達到飽和點,在上文中,表達「飽和」意思的詞匯除了「盤」以外沒有別的。

基于這樣的結論,我們就知道了,這個算題是把漆納稅時當時用的一個漆質量的檢查辦法。下面把上文做口譯。

- 1) 往純粹漆 10 升加了水 30 升,漆溶液就達到所盤的狀態(就是飽和)。〔檢查標準〕
- 2) 現在往納稅人拿來的 10 升漆上一點點地加水,水量達到 27 升時,漆溶液達到了所「盤」的狀態。這個事情說明,納稅人所拿來的漆不是純粹漆,是加水漆。
- 3) 對於這個漆溶液,再添上多少納稅人所拿來的漆及多少水,纔成純粹漆 10 升和水 30 升的漆溶液 40 升(這就是官吏能收進的狀態)呢?〔這個就是本算題的問題〕。
- 4) 現在已經有所已「盤」的漆溶液 37 升,還需要的就是已「盤」的漆溶液 3 升。
- 5) 2) 說明,用加水漆 10 升和水 27 升來成了已「盤」的漆溶液。所以爲了用這個加水漆做出已「盤」的漆溶液 3 升,把這個 3 升用加水漆 10 比水 27 的比例來分割起來,就好了。因此,求加水漆的計算式是:

$$3 \times \frac{10}{10+27} \text{、求水的計算式是: } 3 \times \frac{27}{10+27}$$

6) 于是,納稅者還把自己所帶的加水漆 $\frac{30}{37}$ 升交納,官吏對所交納的漆加了水 $\frac{81}{37}$ 升,做出已

「盤」的漆溶液 3 升.這個 3 升加了前所交納而已「盤」的漆溶液 37 升,就成已「盤」的漆溶液 40 升.這樣,納稅者最後交納純粹漆 10 升=1 斗.

這個算題就是,應該交納純粹漆 1 斗的納稅者把加水漆 1 斗拿來時,官吏檢查這個漆裡加有多少水,按照這個檢查結果,決定讓納稅者再交納多少漆來而設定的問題.

如果我們的理解是正確的話,漆吸收自己體積 3 倍的水之後,應該達到所「盤」的狀態.爲了確認這件事,我們做了一個對生漆和精制漆的加水實驗.這詳細的報告明月將載於「張家山漢簡《算數書》「飲漆」解».在這裡我們向大家想報告,往漆(生漆和精制漆)裡一點點地加入蒸溜水,不久,漆溶解完自己體積 3 倍的蒸溜水量時,就達到了飽和狀態.這說明,這個算題的「盤」就是表達這個飽和狀態的詞匯.^{注 9}

在雲夢秦簡的「效律」裡有「工稟漆它縣,到官試之,飲水」云云的法律條文.這個條文裡的「試水」也是利用漆的飽和狀態來檢查漆的.現在沒有時間解說這個條文.所以我們在注釋裡說明了.

注 10

4. 「大廣」

「大廣」題的文句如下:

大廣.廣七步冊(四十)九分步之七、從(縱)九步十四分步之一、爲田六十四步有(又)三百冊(四十)三分步之二百{十十}(七十)三。大廣朮(術)曰、直(置)廣從(縱)而各以其分母

183

乘其上全步、令分子從之、令相乘也爲實。□有(又)各令分母相乘爲法。如法得一步。不盈步、以法命之。

184

原文的「七、從(縱)九步十四分步之」的部分原來有了 10 字或 10 字以下的缺字.我們用運算來把這個部分的文字能補上來了.在照片圖版上「田」字雖然模糊,但還看得見.這件事是表示我們運算結果是正解的證據之一.

在這裡運算的內容就是:廣(寬度)有「7 又 49 分之 x」步的時候,縱(長度)如果有多少步,田面積成到「64 又 343 分之 273」平方步?

在這裡,我們考慮關於在下面所述的可能性.

兩邊的分母是「343」和「49」,由于 $343 \div 49 = 7$ 的結果,一看就想決定縱(長度)的分母是 7.但是把約分的可能性也考慮進去,是 $7m$ (7 的倍數)的可能性也有.從另一面看,田面積已經被 m 約分,可是被 7 還沒約分.靠著這個事實,能推測 m 就是比 7 小的數字.

一方面,根據「約分」題所說的「不足除者可半,半母亦半子」,能設想 m 是 2 的幾次方的數字.

在這樣的條件下,我們列舉所有的組合之後,達到了一個算式,就是:

$$\left\{7 + \frac{7}{49}\right\} \times \left\{9 + \frac{1}{14}\right\} = \left\{64 + \frac{273}{343}\right\}$$

最後,有一個事情想強調.我們能確定這個數式一定是原文的最大理由是因為在缺字地方後面的「爲」字後,能確認「田」字.有了這個確認,我們纔把上面的數學上沒有矛盾的說明變成一個確信.

我們的宣讀到此結束.最後,我們願意聽取大家的意見,用做今後研究的材料.請大家不客氣地向我們提出意見.

注釋

- 注 1. 本研究是取得平成 15 - 17 年度日本學術振興會科學研究費補助金而進行的.
- 注 2. 「張家山漢簡『算數書』詁注稿(1)-(4)」(大阪產業大學論集人文科學編 108、109、111 112 号、2002 年 10 月—2004 年 2 月)
- 注 3. 大阪產業大學論集人文科學編 114 号、2004 年 9 月。
- 注 4. 郭書春「算數書校勘」(中國科學史料 22 卷 3 期、2001 年 9 月)。
- 注 5. 在注 4 的論文裡郭氏云:「惡,甚也」,這訓詁不講理.
- 注 6. 彭浩『張家山漢簡《算數書》注釋』(科學出版社、2001 年 7 月) 頁 101。
- 注 7. 秦俑考古隊「臨潼上焦村秦墓清理簡報」(考古與文物 1980 年 2 期)。
- 注 8. 注 6 所引的書,頁 69.
- 注 9. 按照我們的實驗結果,漆液(生漆和精制漆雙方)達到飽和狀態之前,有著黏性和流動性,可是一旦達到飽和狀態之後,它喪失了以前的黏性和流動性而顯現出膠狀性。「盤」字除了原義的「盤器」義以外,還有「盤繞」「盤踞」之義.我們推測,古人看了漆飽和狀態,以「盤繞」「盤踞」之義的「盤」字表現漆的飽和狀態.還有一個可能性.因為把飽和狀態的漆放在盤上時,已經沒有流動性,漆不輕易流動,所以把這樣的狀態叫做「盤」.
- 注 10. 原文如下:

工稟鬻它縣、到官試之、飲水、水減二百斗以上、貲工及吏將者各二甲、不盈二百斗以下到百斗、貲各一甲、不盈百斗以下到十斗、貲各一盾、不盈十斗以下及稟鬻縣中而負者、負之如故。

這個條文到現在為止有幾個今譯和外文譯.可是,因為譯者都不能了解文中的「飲水」是怎樣的行為,所以譯文都是逐字翻譯的.我們的今譯如下:

「工匠到別的縣領漆,運抵官府,加以測試.先往工匠所運來的所有漆桶內注水,然後讓達到所「盤」的狀態.注完水以後,官員測量,官府預先所置備的水總量減少了多少.如果總減水量達到 200 斗以上,就罰工匠及率領他們的吏各二甲. 總減水量是不滿 200 斗而在 100 斗以上,就罰各一甲.」

就是說:對於運到官府的漆,官方檢查之後,判斷漆在搬運中適當管理了沒有.好像官方要求工匠及率領他們的吏「漆應該在近於飽和的狀態下搬運」.可是,漆在外觀上判別不了

加著多少水,所以用「加水而達到所盤」的辦法來,判斷他們的管理適當還是不適當.具體說:往所有漆桶加水而到所盤的狀態之後,加水總量越多,他們的管理越不好了.這就是罰款有「從 200 到 100」「從 100 到 10」「10 以下」3 個階段的原因.「水減」意味著,經過注水之後,官方預先所置備的總水量減少多少.