倍半変換問題の教材化
— 数学的な美しさを伝える授業に向けて —

平　井　崇　晴
甲 南 大 学

倍半変換問題とは, ある規則に従って自然数の変換を繰り返し, 目的の数に到達させる数学パズルである．数学的な魅力を感じるばかりでなく, 規則性や操作性, 作問の手軽さなど教材としての価値も認められる.

本稿は, 倍半変換問題の教材化を試みる研究である．どのような効果が見られるか中学 3 年生を対象に授業実践したところ, 自ら進んで課題に取り組み, 活発な議論を交わすなど好ましい反応が観察できた．生徒の探求心を揺さぶる効果がありそうだ．また, その数学的な感動を覚えた生徒がいたことから, 数学的な美しさを伝える教材としても期待できそうだ.

一方で変換操作が位取り法に違反するなど問題点の指摘もある．改善を施し, 新たな教材の開発につなげたい.

1　倍半変換

屯候氏の考案した**倍半変換** [1] とは次のようなものである．すなわち, 10 進記数法で表された自然数 $\cdots A \cdots$ のある部分 A について, 2 倍するか 2 で割った値を A のところにはめ込む変換である．例えば 31415$\underline{592}$6 は, その一部 592 を 2 倍して 3141$\underline{1184}$6 に変換できる．あるいは 2 で割れば 31412$\underline{86}$6 に変換できる.

このような変換を繰り返すと, ある数から他の色々な数へと変換が可能である．例えば, 2011 から 23 へは図 1 のように倍半変換可能である.

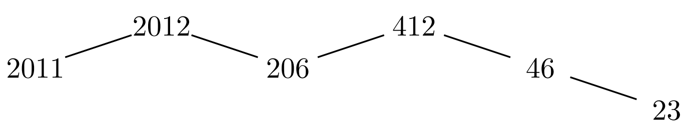

図 1　2011 から 23 への倍半変換

図 1 において “倍変換” した数は上方へ, “半変換” した数は下方へ表記している.

ある数から異なる数へといつでも到達可能であるか, また到達可能ならば必要最小限の変換ステップ数はいくつか等々, 数学的興味は尽きない. このように, 数学的な面白さを含む題材はよい教材となることが期待される. 本稿は**倍半変換問題の教材化**とその実践に関する報告である.

1.1 数学的考察

自然数 a から 自然数 b へ倍半変換可能であるとき, $a \equiv b$ と表すことにする. 倍半変換に関する以下の定理と系が屯候氏により証明されている.

定理 1 (倍半変換可能性)

(1) n を 5 の倍数ではない自然数とすると, $n \equiv 1$ である.
(2) n を 5 の倍数とすると, $n \equiv 5$ である.

系 1 (倍半変換不可能性) $1 \not\equiv 5$

以上より, 5 の倍数でない a, b については, $a \equiv b$ である. すなわち, 5 の倍数を外しておけば任意の 2 数は互いに倍半変換可能である. しかし, いくつか試してみるとすぐわかるように, 具体的に倍半変換の手順を得ることは a,b の与え方によって難易度が大きく変わる.

今, 次の問題を**倍半変換問題**と呼ぶことにしよう.

問題 1 (倍半変換問題) 5 の倍数でない自然数 a, b が与えられたとき,

(i) a から b に至る倍半変換手順を具体的に求めよ.
(ii) a から b に至る倍半変換手順のうち, 用いる変換回数が最小のものを求めよ.

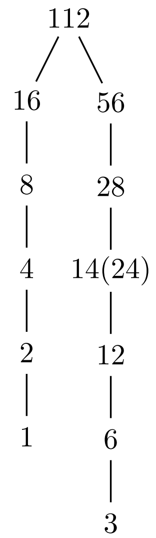

図 2 1 から 3 への倍半変換

問題 1 (i) で求めた手順を倍半変換問題の**解**, (ii) で得られた手順を**最適解**と呼び, 最適解に現れる変換回数を 2 数 a, b 間の**倍半変換距離** (または単に**距離**) と称することにする.

例えば, 図 2 は 1 から 3 に至る解である. これが最適解であることを示すには, 今のところ, シラミ潰しに全件探索を行うしかない. 手間を惜しまず実際に全件探索を行うと, 図 2 は最適解であることがわかる. このことから, 1 と 3 の距離は 11 である. 1 ケタの自然数について同様な探索を行い, 倍半変換距離についてまとめた結果を表 1 に示す.

倍半変換の変換経路を系統図のようにまとめると図 3 のようなものができあがる. この図には 5 の倍数を除く 1 から 99 までの数が全て現れる.

	1	2	3	4	6	7	8	9
1	0	1	11	2	10	9	3	9
2	1	0	10	1	9	8	2	8
3	11	10	0	9	1	4	8	5
4	2	1	9	0	8	7	1	7
6	10	9	1	8	0	3	7	5
7	9	8	4	7	3	0	6	4
8	3	2	8	1	7	6	0	6
9	9	8	5	7	5	4	6	0

表 1　倍半変換距離

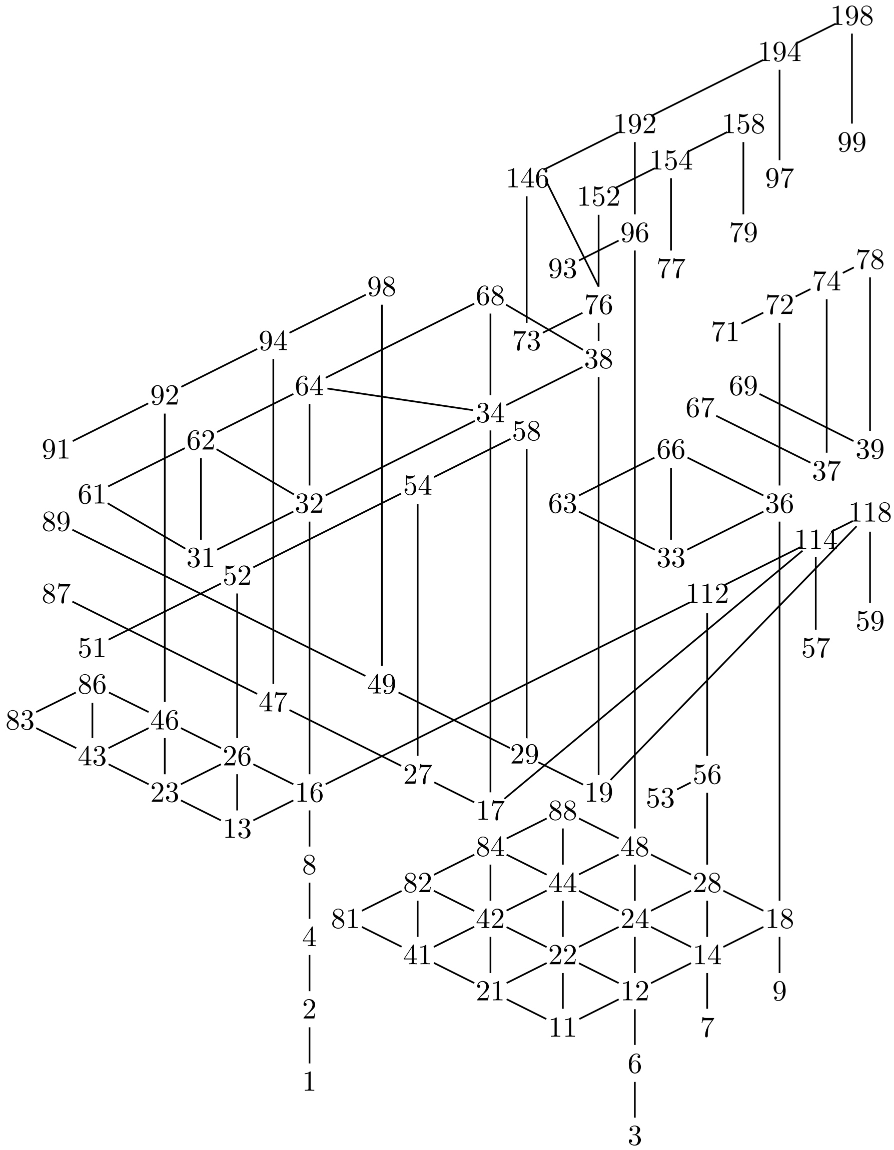

図 3　99 までの倍半変換系統図

1.2 教材としての倍半変換

前節で考察したように, 倍半変換問題は数学的に興味深い. そればかりでなく, 以下に示す根拠から教材としての価値も認められる.

1. a, b を 5 の倍数以外から選べばいくらでも新しい問題が作成でき, しかも解の存在が保証されている. (**作問の手軽さ**)
2. a, b の与え方で難易度を調整できる. (**個に応じた出題**)
3. 試行錯誤で解が得られる. (**操作性**)
4. 得られた解について, 別解や最適解を考察させることができる. (**解の吟味**)
5. 4 の考察は, 倍半変換の持つ規則性や性質の探求につながる. (**規則性の発見**)

生徒の探求心を刺激し, 自主的な活動を誘発させるような教材として期待できそうだ.

2 倍半変換の授業実践

平成 23 年 3 月 4 日, 柏原市立 K 中学校第 3 学年 (男子 12 名 女子 4 名 計 16 名) において教材としての倍半変換を試みる授業実践の機会を得た. 授業時数は 1 時限だけだったので, 自主的な活動をより促進させるよう各班 4 人の班別対抗形式にした.

授業の概要は以下の通りである: 授業冒頭で, ある数学マジックを披露しこのトリックを解説した「秘伝書」を班別対抗で争奪する. 解き合った後, 提出された解答について全員で吟味する. 最後に, 変換問題にはコラッツの予想[*1]と呼ばれる未解決問題もあることを紹介して授業を締めくくった.

2.1 班別対抗秘伝書争奪戦

倍半変換手順の説明及び例示の後, 定理を紹介し以下のように課題を与えた.

- 班別対抗で倍半変換問題を解きます.
- できた班から解答 (経路) を提出しなさい. 最優秀班に秘伝書を進呈します.
- 提出順よりも経路の短い解答を優先します. 従って, 提出が遅い班も逆転勝利の可能性があります.
- 練習問題「13 を 1 に倍半変換しなさい.」
- **本題「3 を 1 に倍半変換しなさい.」**

[*1] 偶数は 2 で割り, 奇数は 3 倍して 1 を足すという操作を繰り返すと必ず $4 \to 2 \to 1$ のループに入るという予想.

2.2　実践の様子

生徒の反応は概ね良好であった. 誰もが自主的に系統図を作成し試行錯誤していた様子から, 自ら進んで課題に取り組む姿勢が伺えた. 比較的大きな系統図を作成した班や工夫をこらす班もあった. 図 4 に示す系統図からは, 3 と 1 の両方向から到達可能な経路を探索した形跡が見られる.

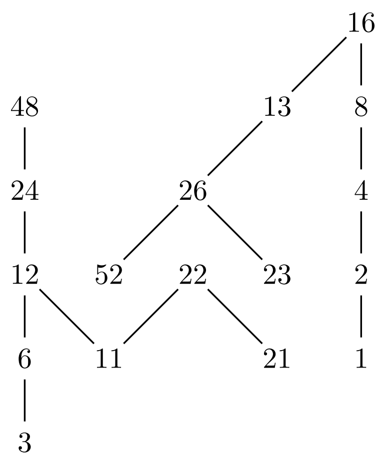

図 4　生徒が作成した系統図の例

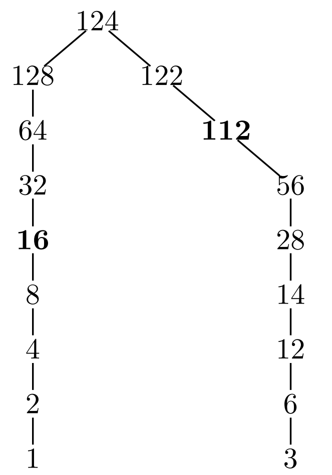

図 5　提出された解答

課題は予想以上に難しかったらしく, 解答を提出できた班は 1 班だけにとどまった. そんな難問にも屈せず, 嬉々とした様子は後述の「生徒の感想」からも伺える.

以上の観察から, 生徒の自主的な活動・探求が見られたといってよいだろう.

各班が課題に取り組んでいる間は, 予め用意した図 3 を手にして机間巡視した. 例えば, 16 や 112, 56 などカギになる数字をマークしておくと, 系統図上での生徒の動きが見えやすかった. それを参照しながら「いい数字が出ているねぇ」とか「近くまで来ているよ」などと告げることは, 大きな励ましになったようである. ゴールに近づいているかどうかを知らせる一方でカギの数字は具体的には知らせず, 誘導にならないように注意した.

また, 指導者自身が倍半変換の操作に慣れている必要はある. 机間巡視の際, 生徒に変換の正誤を質問されることがあったが, 瞬時に応答できることは円滑な授業進行に不可欠だろう.

解答を回収した後も, 単なる答え合わせに終わらない有意義な議論ができた. 図 5 は実際に提出された解答 (3 から 1 に至る経路) である. 生徒全員でこれを吟味し, 変換に誤りがないことを確認した. このとき, 図中 16 と 112 を直接結ぶと, より短い経路が作れることにひとりの生徒が気づいた. 実はその経路こそ図 2 に示した最適解である. この事実を告げると彼女の表情はほころんだ.

2.3　生徒の感想

授業の最後に全生徒 16 名に感想を書いてもらったところ, 以下のように大別できた.

① 面白かった・楽しかった (7 件)
「こうしたゲームは初めてだったのでかなりむずかしかったです. でも面白かったです.」 他

② 数学の深さを味わった (4 件)
「もんのすごい熱中できました. 数学の深さを改めて知りました.」 他

③ その他 (5 件)
「最後までできなかったから, 最後までやってみたかった.」 他

特に, 回答 ① のうち 5 件は, 難しかったけれども楽しかったという主旨のものだった. 容易に解けることが楽しいのではなく, 歯ごたえのある点を楽しんでいたように思われる. 題意は簡明にして解法は難しい, それでいて試行錯誤による操作性が楽しくさせる要因のようだ.

3　課題と改善策

生徒の感想に以下の記述があった.

(※)「数学の基礎から離れてて, 基本が分からなくなりそうだったけど, 1 に絶対行くのはスゴイと思った.」

「数学の基礎から離れてて」とある. ここでいう「基礎」とは何を指すのか考察する.

倍半変換では, 変換する箇所を選ぶ際, 数を数字列と見なしている. 選んだ箇所の変換では数値として扱い, それを元の数に戻す行為では再び数字列扱いしている.

このように数を数字 (numeral) と見たり数値 (number) と見たりすることが混乱を与えるのではないかと懸念される. 特に, 一度変換した数字列を元の数字列に戻す操作に問題があるとの指摘がある. なぜなら, 倍変換の際には桁数が増えてもそのままはめ込む. この操作は**位取り法**に違反するというのである. 例えば, 31415926 の 592 を倍変換すると桁数が増えるがそのままはめ込んで 314111846 とする. これが「基礎」から離れ, 「基本が分からなくなりそう」にしたのかも知れない.

そこで, 倍半変換の規則を改良し問題点の回避を図る. 2 倍したり 2 で割った値を元の箇所にはめ込まず, その値をそのまま新しい数とする. 例えば, 31415926 は 314111846 や 31412966 ではなく, そのまま 1184 や 296 に変換させる. こうすれば, 数字列から任意に抽出した部分を単に変換するだけなので, 位取り法には反しないだ

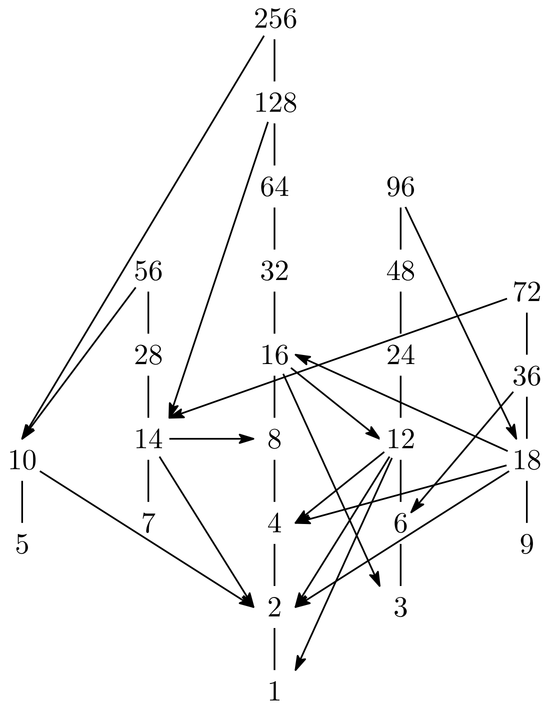

図 6　抽出型倍半変換

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	**5**	2	10	6	9	3	10	9
2	1	0	4	1	9	5	8	2	9	8
3	**3**	3	0	3	11	1	10	4	7	10
4	2	1	3	0	8	4	7	1	8	7
5	3	2	6	3	0	7	10	4	11	1
6	2	2	1	2	10	0	9	3	6	9
7	3	2	4	3	9	5	0	3	5	4
8	3	2	2	1	7	3	6	0	7	6
9	3	2	4	2	8	3	5	3	0	7
10	2	1	5	2	1	6	9	3	10	0

表 2　抽出型倍半変換距離

ろう．数字と数値の読み替えも負担が軽減される．このような倍半変換を**抽出型**倍半変換 [2] と呼ぶことにする．

抽出型では一般に，変換操作が直接的には可逆にならない．例えば，$1\underline{6}$ から 12 へは直接変換可能であるが，12 から 16 へは $1\underline{2}$ – 4 – 8 – 16 のようにたどらなければならない．このことは距離に**向き**を与えることになる．例えば，1 から 3 への距離は 5 であるが，3 から 1 へは距離 3 である．系統図を作成すると，図 6 のようになる．

図 6 を見ると，$1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 4 \equiv 5 \equiv 6 \equiv 7 \equiv 8 \equiv 9 \equiv 10$ は示されている．任意の数について，0 以外のひとケタを抜き出して 2 倍するか 2 で割った値は必ず図 6 中に

存在する．それらの数値はいずれも 1 に到達可能であるから, 任意の数は 1 に抽出型倍半変換可能である．逆に, 1 から任意の数への抽出型倍半変換が可能であることも証明される.[*2] 従って, 抽出型に変更しても, 任意の 2 数は互いに変換可能である．抽出型では 5 の倍数を別グループに分けなくてもよい.

抽出型倍半変換についても問題 1 と同様な問題を考えられる.

問題 2 (抽出型倍半変換問題) 任意の自然数 a, b が与えられたとき,

(i) a から b に至る抽出型倍半変換手順を具体的に求めよ. (**解の存在**)

(ii) a から b に至る抽出型倍半変換手順のうち, 用いる変換回数が最小のものを求めよ. (**最適解**)

(iii) 逆に, b から a に至る抽出型倍半変換についても (i), (ii) を行え. (**可逆性**)

しかし, 可逆性が単純でないためにかなり難しい問題になる．教材として扱う際は, 与える 2 数 a,b は指導者が周到に準備しておく必要があろう.

生徒が興味を引くように, 問題 2 は「占い」にアレンジしてみた.

抽出型倍半変換恋占い

(1) 自分の誕生日から意中の相手の誕生日に抽出型倍半変換できれば想いが届く.

(2) 変換のステップ数が短いほど, 想いは早く伝わる.

(3) 逆に, 相手からも自分の誕生日へと変換できれば, 恋愛は成就する.

このような設定を与えた上で例えば, 「4 月 8 日 (48) 生まれのあなたと 1 月 4 日生まれ (14) の彼との相性を占いなさい」のように出題し, 両方向の変換ステップ数を求めさせる．系統図を描かせて思いを巡らせてもよい.

占いの診断例を考えてみる．48 と 14 は互いに変換可能であるから, あなたと彼は相思相愛になる可能性がある．しかし, 図 6 を参照すると 12 月 8 日生まれ (128) の恋敵から彼への距離は非常に近い．もしも彼の気持ちが恋敵に向いているとすれば, あなたの告白は急がねばならない.

4　まとめと展望

倍半変換問題を題材に授業を実践し, 生徒に与える効果や反応を観察したところ, 自主的な探求活動や数学に対する関心, 解を吟味して議論するなど好ましい成果が見られた．一方で, 倍半変換には混乱をきたす操作も含まれているとの指摘もある．そこで, 変換方法を改良して抽出型倍半変換を考案した．これを実践する機会は今のところ得られていない．今後, 変換距離の比較的短いいくつかの数を用意して恋占い教材を実践したい.

[*2] 証明は濱中裕明氏による.

ところで, 前節で取り上げた生徒の感想 (※) 後半の「1 に絶対行くのはスゴイと思った」にも着目したい. (5 の倍数を除く) どんな数も必ず 1 に到達できるという結果を実感し, 感動しているようだ. 同様な感想は他にも数件見られた. 数学的感動を伝えられた点は大切にしたい.

ペンローズ[*3]によれば, 数学では単にシンプルであることはそれほど美しくなく, 予期しないシンプルさこそが美しいという. "Mathematical Intelligencer" という雑誌の 1990 年 3 月号には, 読者数学者を対象に「美しい定理」についてアンケートした結果が掲載され, その第一位は $e^{\pi i} = -1$ だったそうだ [3]. これがなぜ美しいのか. 循環しない無限小数 (無理数) π と得体の知れない虚数 i との積が無理数 e の指数になっている. 左辺はさぞかし複雑な値になりそうだ. ところが, そういう感覚に反して -1 というシンプルな整数になる. ここに驚きと共に美を感じるのではないか. 複雑な倍半変換の道のりを経て 1 に辿りつくとき, 似たような感覚が得られるのかも知れない.

倍半変換という操作そのものは, 定着させたい技術というわけではない. 位取り法に反する点から言えば, むしろ慣れさせてはならない操作かも知れない. 生徒が間違えないように技術を伝え, 真実をわからせることは数学教育の基本姿勢だろう. しかし, それが窮屈になってはならない. カントルは言った. 数学の本質はその自由性にあり. 恐れず, **数学的感動美**に触れさせ共感することは美しい音楽や絵画を鑑賞させるのと同様ではなかろうか. 数学美を感じ取る感性が中学生にも芽生えつつあることを前述の感想は示唆しているように思える.

倍半変換や恋占い教材が有効に機能し多くの生徒に数学的感動を与え, 恋愛成就と共に, 学業も実り多きことを願ってやまない.

謝辞 倍半変換をご紹介頂いた屯候先生, 抽出型倍半変換に関する証明を頂いた兵庫教育大の濱中裕明先生, そして実践の機会を与えて下さった中学校教諭 西村徳寿先生と楽しんで授業に参加して下さった中学生に深く感謝を申し上げます.

参考・引用文献

[1] 屯候「倍半変換について」 第 65 号 初等教育 2010 年 11 月号 p.57 – p.62.

[2] 平井崇晴「倍半変換ゲーム – 倍半変換の教材化 –」第 49 回 近畿数学教育学会 (口頭発表) 2011 年 2 月 19 日.

[3] アルブレヒト・ボイテルスパッヒャー『数学はいつも苦手だった』日本評論社 2004 年 10 月 15 日 p.88 – p.90.

[*3] 2 種類の図形で非周期的な平面充填の「ペンローズ・タイル」や不可能立体「ペンローズの三角形」,「ペンローズの階段」などで有名.