

空間図形の視点移動体験

— 変な立体を変だと感じる年頃 —

平井崇晴*

(甲南大学非常勤講師)

平成 21 年 9 月 26 日

1 変な立体

エッシャーの作品に見られるような、絵として描けるけれども実際に作ろうとすると構造的に不可能だと感じさせられる立体を 不可能物体 (変な立体) と呼ぶことにする。さらにここでは, [4] に従い以下の前提をおく。

前提 1 (立体) 対象とする立体は, 不透明な材質で作られた厚みのある多面体である。

前提 2 (視点) 視点は立体に対して 一般の位置 にある。

前提 3 (描き方) 立体の投影図には, 見える稜線のみを描く。

前提 4 (三面頂点) 立体の各頂点には, ちょうど 3 個の面が接続している。

前提 5 (絵の完全性) 絵には, 立体の全体が描かれており, 一部が画面からはみ出すことはない。

前提 1 から, 絵の中に曲線は現れない。「視点が一般の位置にある」の詳細な定義は [4] に譲るが, 前提 2 から, 視点をわずかに動かしても見え方が構造的に変わることはない。例えば, 1 本に見えていた稜線が 2 本に分かれたり, 1 点に見えていた頂点が 2 点に分離したりするようなことはない。前提 3 は絵の中の 1 本の線分は, 立体の唯一の稜線に対応することを保証する。前提 4 から, 1 頂点に 4 枚以上の面は接続しない。前提 5 から, 最も外側を囲む線は輪郭線であることが決定づけられ, 他の線が

* takaharu.hirai@nifty.com http://homepage2.nifty.com/takaharu_hirai/

凸稜線なのか凹稜線なのかを導くことに役立っている。

図 1 に不可能物体の例を示す。実現不可能のように感じさせられるから不可能物体であるが、実は、これに関しては、実物を作ることができる。思い描いていた印象とはかなり異なる物体をある方向から眺めることになるのだが、このように、不可能物体のいくつかは実際に作ることができる。投影図が正しく立体を表すかどうかの判定条件も [4] に示されている。

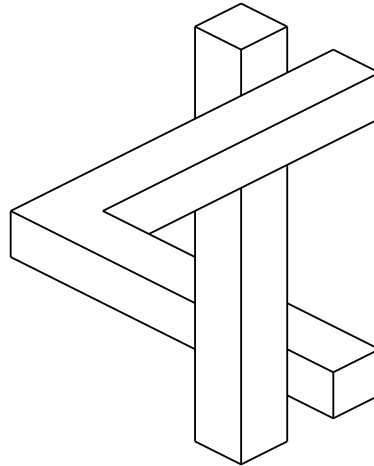


図 1

さて、立体の見取り図がうまく描けない子どもも不可能物体らしき絵を描く。それの中から実現可能なものを選定し、実際に作成してその子どもに見せたら、自分の描画が誤っていることが明瞭となり、立体の把握や描画技術の支援になると考えた。これが本研究の動機である。

しかし、その後の考察で立体を把握しきれていない子どもに不可能物体の実物を安易に提示することは取りやめた。返って混乱を来す恐れがあると判断したからである。そのような子どもは実物に関する知識と見え方に関する知識の調整がうまく取れていない。本発表では、その調整の手助けになりそうなメソッドの提案にとどめる。成果の確認は今後の課題である。

2 先行研究

[1] は、見取り図をイメージして描かせる実験を考察したものである。その結果、描画技術の習得にいくつかの発達段階を確認したという。すなわち、一面だけを描く段階、正面または上面を表す図に他の面や空間的特徴を描き加えたような図を描く段階、自分の絵の矛盾を解消しようとするが不完全な図や複数視点を持つ図を描く段階、通常の見取り図を描く段階である。立体についての知識とその見え方、そして描画技術

の習得という三者相互の克服が子どもにとって困難であることが示唆されている。

一方 [2] は、エッシャーの「ものみの塔」や安野光雅の「不思議な絵」のように不可能物体を含む絵画を提示して矛盾に気づくかどうかを観察したものである。その結果、児童・生徒は長い期間を要してようやくその矛盾や全体的な構造を指摘できるようになるという。すなわち、小学校 4 年までは立体的構造にはほとんど注目せず、その後中学までの間に徐々にその矛盾に気づくようになり、高校になって部分から全体構造へ統合的に見られるようになったと報告している。

[3] は中学 3 年生を対象に立方体を色々な方法で描画させている。その結果、描画技術は有しているが事実に関する知識がそれを妨害すると述べている。[3] で行われた興味深い実験をここに紹介する。

被験者に図 2 のような見取り図を印刷した用紙を提示して、そのまま模写させる。ところが、絵の中に「立方体」を意識してしまうと、模写にもかわらず、例えば図 3 のように正面の下部と側面の下部を一直線に描画してしまうなど、うまく描けない被験者もいたそうである。一方、図 4 のように立方体を意識させないように模様として提示すれば容易に模写できたそうだ。模様の中に図 2 と同じ枠組みが含まれているのだから、立方体を意識しなければその枠組みは描ける。しかし、実物を意識すると面と面が垂直に交わるといった立方体に関する知識が描画技術を妨げる結果になったと述べている。

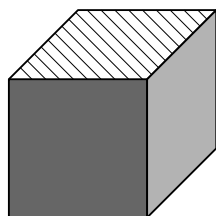


図 2

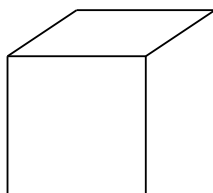


図 3

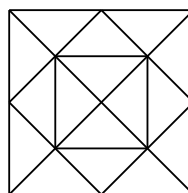


図 4

今、先行研究の結果を次のように分析する。すなわち、子どもが立体を描画する際、事実に関する知識は見え方に関する知識に優先され、描画の拠り所にされている。見取り図描画の最初の段階では、一面だけ、例えば立方体に対して 1 つの正方形だけを描く。これは立方体の各面が正方形であるという事実と正面から見れば一面だけが見えて、それは正方形に見えるという見え方に関する知識が合致するからだろう。立方体の三面が見えている見取り図を描こうとすると、正方形を 3 つ描くことになる。しかし、単にそれを並べて描けば同一平面になるという事実に関する知識に矛盾する。それを解消するために工夫をするのだが、見え方に関する知識は補助的である。そのため、立方体の見取り図を模写する場合でも、見え方が眼前に与えられているにも関わらず、正しく模写できない。

部分から全体構造へ統合的な見方ができるためには、見え方に関する知識を組み合わせる必要がある。その知識が乏しかったり積極的に活用できなかつたりすると不可能物体の矛盾に気づかないのではなからうか。また、ねじれの位置という知識を持っていてもそれに関する見え方の知識が欠如すると変な立体を変だと感じられないのかも知れない。

以上の考察から、見え方に関する知識獲得を支援する教授法を考案したい。

3 見え方に関する原理 – 遠近法 –

ここで、見え方に関する原理として、遠近法について確認しておく。

下図のように、 P を描きたい外の世界の 1 点、 E を視点、 I を投影面とする。このとき P の投影面上の像 P' は EP と I との交点として得られる。

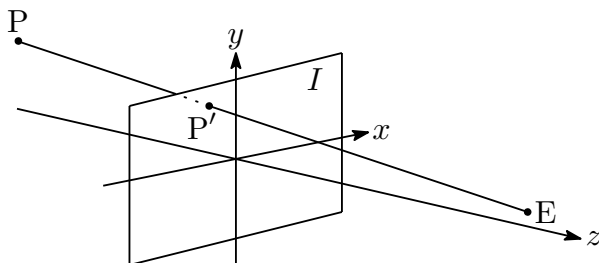


図 5

$P(x, y, z)$, $E(e_x, e_y, e_z)$ ($e_z > 0$) とすると、 $P'(x', y', z')$ は次のように表される:

$$(x', y', z') = \left(\frac{e_x z - e_z x}{z - e_z}, \frac{e_y z - e_z y}{z - e_z}, 0 \right)$$

これが実物と見え方をつなぐ数学的な関係である。

さて、遠近法の性質を見え方として捉えよう。

外の世界に一組の直線群 G があり、視点 E から G に平行に伸ばした直線と投影面との交点を G^∞ とする。この点 G^∞ は直線群 G の消点と呼ばれる。

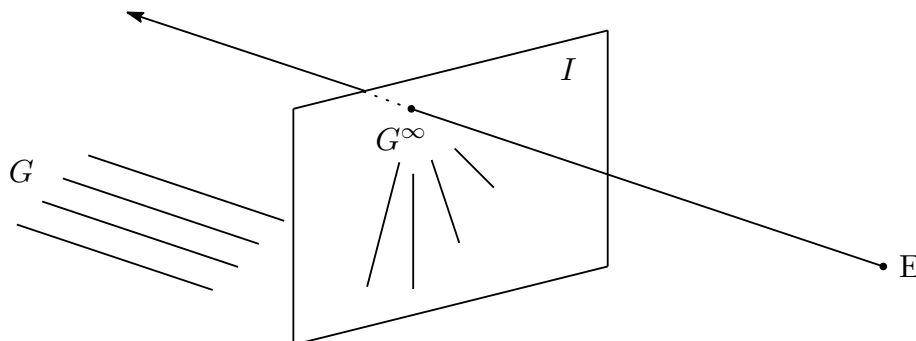


図 6

遠近法では、平行線群 G は、その消点 G^∞ から放射状に出る直線群に投影されることが示される。したがって、平行な 2 直線は (延長上で) 交わる 2 直線に見える。当然、ねじれの位置にある 2 直線も一般に交わる 2 直線に投影される (見える) から、投影面で交わる 2 直線が実際には平行であるかねじれの位置にあるか、すぐには判断できない。

反対に、投影面における平行線は、一般にねじれの位置にある 2 直線の像であることも示される。このことから、ねじれの位置にある空間の 2 直線が平行に見えるような視点が存在することがわかる。

また、平行線群が放射状の直線群に投影されるのだから、平行線群 G に垂直な直線の像は G の像と一般には直交しない。このことから、「直角は必ずしも直角には見えない」ことがわかる。当然、鋭角や鈍角も一般には直角に投影されないから、投影面の角度が実際に直角かどうかの判断もつきにくいはずだ。

さらに、同じ投影図を持つ複数の立体が存在する。

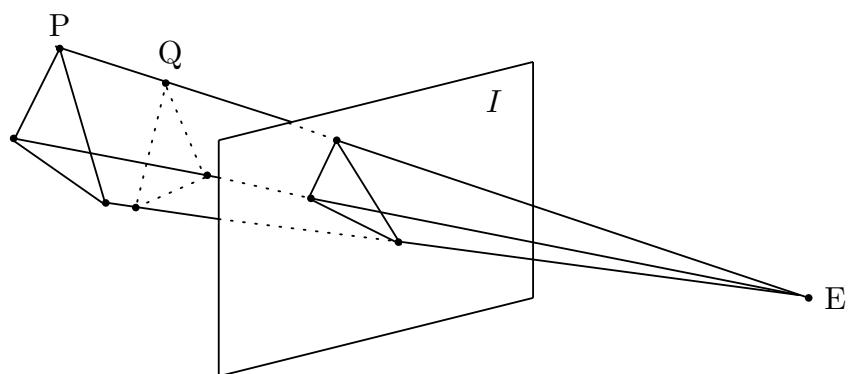


図 7

遠近法の原理がプログラムされていない人間にとって、ねじれの位置であるのか平行であるのか、直角かそうでないのか、ましてや投影図から復元される実体を判断することは困難である。エッシャーの「ものみの塔」に代表されるように、不可能物体を含む絵画には、平行に見せようとするねじれの位置が多く描かれている。

見え方に関する知識の獲得は非常に困難であることが想像される。

4 実在可能な不可能物体のトリック

多くの不可能物体は実在しないのであるが、中には実際に作れるものもある。

図 1 は実在可能な不可能物体であった。実在するにも関わらず、作れないと感じてしまう要因は面と面はどれも垂直に接着していると思込まれる点にある。この図はあたかも x 軸、 y 軸、 z 軸であるかのような 3 組の平行線だけから構成されている。

そのような図を見ると多くの人は面と面は直交していると思いがちのようである ([4], [5] 参照). 直角をなしているかのように思っていた角をことごとく鋭角や鈍角に調整すれば, 図 1 を投影図に持つ実物はあり得る. その実物を図 1 のように投影する視点が存在するのである.

同じ投影図を持つ複数の立体が存在するのだから, 角についても直角と直角でない角が同じ角度に投影される配置が存在する. 投影図から実物を復元しようとするとき, 人は直角の方を選びやすいのではないか. なるべく自然な立体 (直角を多く含む立体) を想像しようとしているのではないだろうか.

5 視点移動体験

さて, 見え方に関する知識獲得を支援するにはどうしたらよいだろうか. 投影図から実物を復元することは困難であるから, 投影図と実物の組を与えて視点を探させてはどうだろう. 遠近法では, 投影図に対して視点は一意に定まる.

そこで, 視点移動体験 の活用を提案する. 投影図を印刷した透明板 (投影面) と実物を与え, 図と実物が重なる視点を探させるものである.

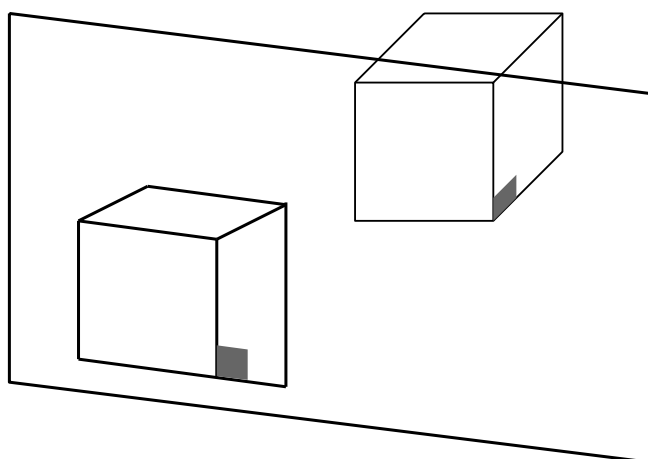


図 8

まだ見取り図がうまく描けない子どもに対しては, 立方体のような基本的な立体とその投影図の組を渡し, すべての稜線が実物と重なる視点を探させる. 実物と正しい投影図の組だけでなく, 例えば, 正しく描画できなかった子どもの絵を元にした図と実物の組も用意する. 投影図と実物は部分的には重なるように細工しておく. また, 注目させたい箇所には印をつけておく. そうしてすべての稜線が実物と重なる視点が見つからないことを体験させる.

基本的な立体の見取り図が描けるようになった段階の生徒には, 正二十面体のようなやや複雑な立体とその投影図の組を与えてはどうだろう. 稜線が正五角形を描いて

いるような視点を発見できればうれしいかも知れない。

高校生のように不可能物体の矛盾を指摘できるようになった生徒には、実在する不可能物体とその投影図の組を与えてみる。視点を見つけたときの感動は大きいだろう。

様々な立体を眺める経験が豊富かどうかは、空間図形のイメージや描画ができるかどうかに影響する。そのとき、ただ漠然と眺めるだけの経験ではなく、「このように見える視点はあるか」という目的意識を持たせて立体を観察させることが肝要だろう。

6 展望 — 結論に代えて —

先日、あるテレビ番組で次のような問題が紹介されていた。

問題 正八面体を1つの面を下にして水平な台に置きます。この正八面体を真上から見た図を描きなさい。

これは2008年度東京大学(理系)の入試問題だそうだ。番組では正三角形に関する知識などを駆使して計算的に作図する解法を紹介していた。

東大の出題意図は不明であるが、事実に関する知識と見え方に関する知識をいかに組み合わせられるかを問うているように思う。

正八面体の見取り図は次のようなものをよく見かける。

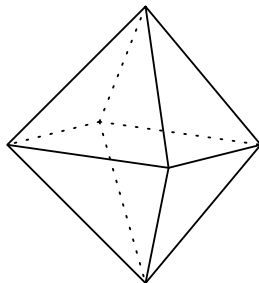


図9

これを水平な台に置くのだから、正三角形のある面が下に配置される。このとき、図形の対称性に注意すると、対面が存在してその面が台に平行になる。視点移動体験を積んだ人は、この想像が容易にできるのではないだろうか。上の見取り図から視点を動かして想像するのである。このことに気づけば大体の見通しはたつだろう。

空間図形は断片的な知識だけでは把握が難しい。それらを有機的につないだ理解に昇華できるかどうかである。そのカギは見え方に関する知識を有効に活用することではないだろうか。

視点移動体験が見え方に関する知識獲得を支援し、立体把握の促進につながることを期待する。

参考・引用文献

- [1] 狭間節子 (研究代表者) 「数学教育における空間図形の二次元表示の役割についての研究— ポリキューブ・スケルトン四角錐の表示 —」大阪教育大学研究成果報告書 (1991 年)
- [2] 狭間節子 (研究代表者) 「数学教育における空間思考の育成に関する研究」大阪教育大学研究成果報告書 (2000 年)
- [3] 渡邊伸樹 「子どもの描画にみる空間概念について (その 1) — 立方体描画の困難性の考察 — 」近畿数学教育学会口頭発表 (2003 年)
- [4] 杉原厚吉 著 『立体イリュージョンの数理』共立出版 2006 年
- [5] 杉原厚吉 著 『へんな立体』誠文堂新光社 2007 年