

$\sum a_i$ と「 a_i の和」

— 第二言語としての数学記法 —

平井 崇晴
甲南大学

数学記法の習得は決して容易ではない。その多くが自然言語の略記から生まれた事実を鑑みると、数学記法は言語的な側面を持つと考えられる。その意味で、数学記法は学習者にとって第二言語だと捉えられる。記法習得はなぜ難しいのか。本稿は、第二言語習得研究や生成文法理論の見地から、その難しさについて理論的な説明を与える。その説明を裏付ける実験の結果からは、数学的な内容を理解していても記号を用いてその記述ができない生徒は少なくないと思われる。本稿の後半では、記法習得に有効な指導法を考察する。

1 数学記号を言葉として捉える

本稿の題目を、英文題目と比較すると面白い。 $\sum a_i$ において \sum は「和」の意味であるから、題目中の「 a_i の和」は $\sum a_i$ を右から左に読んでいる。一方、英文題目ではこの箇所が “the sum of a_i ” となっているので、 $\sum a_i$ は左から右へと自然な順序で読まれている。このように、母語^{*1} の語順が数学記法に対応する学習者とそうでない学習者では、その記法を使い慣れるために要する労力も異なるだろう。

記号を使い慣れないと数学能力があっても行使できない状況が生まれる。例えば、英文 “the sum from one to ten” を日本文「1 から 10 までの和」に訳せなければ、足し算とはどういう操作なのかがわかっていてもその処理を実現して 55 を得ることはできない。 $\sum_{k=1}^{10} k$ を日本文として解釈できない生徒には、これと似た状況が生じていることだろう。反対に「1 から 10 までの和」ということを伝えたいのに \sum 記号を使いこなせないと、意に添わない記述を強いられることもあろう。

数学教育の目的は決して数学記号を読めるように終始することではない。読めるかどうかよりも、その概念理解や処理能力を身につける事の方が重要である。だから、記号の読み方に指導時間を大きく割くわけにもいかない。しかし、折角の数学能力も行

^{*1} 言語学用語でいわゆる母国語のこと。幼児が最初に獲得する言語を指し、第一言語とも呼ばれる。

使できないのでは、コミュニケーションツールとしての記法の役割も無視できない。そればかりか、同じ白紙答案を提出した生徒でも、理解しているにも関わらず単に記述ができないだけの者と理解していないために解答できない者では、同等には扱えない。前者の生徒は記法習得さえさせれば救われるのである。

そこで、数学記法の言語的側面を分析し、コミュニケーションツールとしての役割を再認識したい。本稿では、母語の違いによる数学記法の習得差異について言語学的に分析する。日本語を母語とする学生と英語を母語とする学生を対象に集合記法の記述に関する実験を行ったところ、英語母語話者の方が有利な結果が得られたことを報告する。また、日本語母語話者には自分の考えを数学記法で記述できない者が多い可能性があることも実験結果は示唆しているように思われる。この結果を踏まえ、数学記号が言葉であることを意識した指導法を考察する。

2 第二言語としての数学記法

一般に、数学記法は自然言語、特にヨーロッパ系言語の略記から生まれている [1]。例えば、加法の $+$ 記号は英語の *and* に当たるラテン語 *et* を早く書いたものが始まりだといわれている。実際、英語 “*a and b makes c*” の語順通りに数式 $a + b = c$ の記号が出現する。この数式を「*a* 足す *b* は *c*」と読ませたのは先人の知恵だろう。本来の日本語は「*a* に *b* を足すと *c* になる」となるはずで、この語順に記号を並べると $a b + c =$ となる。^{*2}

数学記法が自然言語の略記であるなら、言語的側面を持つことは想像できる。本節では数学記法を言語として捉え、その習得の難しさについて、生成文法理論や第二言語習得研究と呼ばれる言語理論によって説明を与えたい。

人間が言語を獲得するメカニズム (言語機能) の解明を目指す経験科学としての言語学として生成文法^{*3} と呼ばれる理論がある。また、母語獲得の後に習う別の言語を第二言語 といい、この習得に関する研究分野は第二言語習得研究と呼ばれる。第二言語習得の過程は、大雑把に言えば言語機能に組み込まれたパラメータを母語の値から第二言語の値に書き換えるようなものである。パラメータの値の違いが言語構造^{*4} の違いとして現れ、さらにその反映が語順であると考えられている。近年の研究では、第二言語を習得する際、母語がどの程度影響を与えるかという問題と、人間が本来持つ言語機能はどの程度利用可能かという問題は複合して議論される [5]。

^{*2} 逆ポーランド記法と呼ばれる記法になる。

^{*3} 言語学者 Noam Chomsky の研究に端を発する理論。この理論では、人間は生物学的に言語機能と呼ばれる器官を持って生まれると仮定する [4]。幼児が極めて短期間に言語獲得に成功するのはそのためだと説明している。本稿では、生成文法という用語を広義に用いる。

^{*4} 生成文法によると、言語表現は素性と呼ばれる単語に関する諸特性 (人称、性、数、時制、品詞等々) が組み上げられたり、移動したりすることによって階層構造を成している。

さて、数学記法を言語と捉えると、日本語母語話者や英語母語話者が第二言語である数学語を習得するという構図を想定できる。母語の違いは習得にどのような影響を与えるのだろうか。数学語 $a + b = c$ 及びこれに対応する日本文、英文の構造は図1のようになる^{*5}:

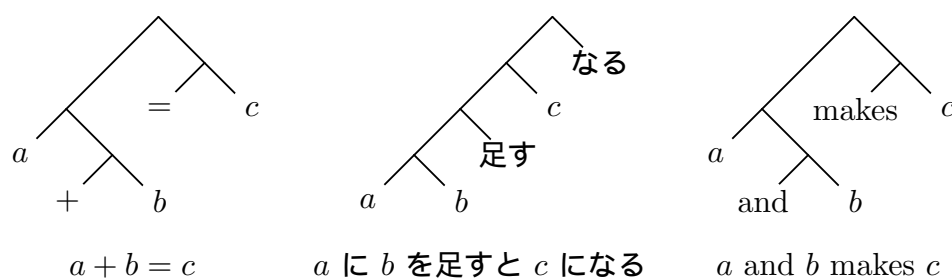


図 1: 言語構造の違い

このように、数学語と英文は構造が酷似しているのに対し、日本文の構造は大きく異なる。第二言語習得の初期状態仮説はいくつかある [5]。そのうち、母語獲得の完了状態から第二言語の習得が開始される母語完全転移の立場をとると、数学語を習得しようとする日本語母語話者は多くのパラメータ値を変更しなければならない。

さらに、自然言語の略記から作られた数学記法の場合、略記が言語構造を壊し、一部の素性も欠落させている。略記を解釈するには欠落した素性を補い言語構造を復元する作業を伴う。母語の構造が数学語の構造と大きく異なることは、解釈にもかなりの負担を強いると推察される。こうして、日本語母語話者は英語母語話者よりも数学記法の習得に不利な点があると言えよう。

ところで、多くの日本語母語話者は、「 a 足す b は c 」を自然な日本語として受け入れ、第二言語のように感じない。生成文法理論によれば、幼児は一般に 5-6 歳で文法の大半を完成し、14-15 歳で完全に文法を習得してしまう [6]。つまり、四則演算は母語獲得を完了する前に習うので、「 a 足す b は c 」は母語として獲得されてしまったと考えられる。本研究で対象とする数学記号は、母語獲得完了後と見られる高校数学 (以降) で扱われるものに限定する。

3 日英母語話者の比較実験

これまでの考察に基づいて母語の違いが数学記法への構造変換にどの程度影響するか実験を行った。自分の考えている内容が数学記法で表せるかどうかを調べるものである。方法として、数学的な内容を母語で与えそれを意味する数学記法を選ばせる形式にした。このとき、母語で与えた数学的内容が正しく解釈できている必要がある。そこで数学記法として集合記法を取り上げ、外延的記法によってその確認を行った。被験者にある集合に関する記述を母語によって与え、意味する集合を外延的記法で答

^{*5} 構造の違いを強調して日本語のテニヲハは除去し、生成文法理論上の厳密性は欠いている。

えさせる。その正解者だけを抽出して、今度は意味する内包的記法を正しく選べるかどうか調査するのである。

ここで、内包的記法と母語による記述について考察しておく。集合 A, B について、例えば「2倍したら B の要素となる A の要素全体の集合」を考える。この日本語による記述は内包的記法で $\{x|2x \in B, x \in A\}$ と表せる。両者を見比べると、日本語による記述には x が現れない。そこで x を補った日本文も考える：「 x の集合であって、 x の2倍は B の要素であり、 x は A の要素である。」この日本文は先の日本文よりも内包的記法の構造に近い。そこで先のような自然な母語に対してこれを（内包的記法の）「直訳母語」と呼ぶことにする。

$\{x|2x \in B, x \in A\}$ について、日英両母語による記述を以下にまとめる：

数学語（内包的記法） $\{x|2x \in B, x \in A\}$

自然な日本語 「2倍したら B の要素となる A の要素全体の集合」

直訳日本語 「 x の集合であって、 x の2倍は B の要素であり、 x は A の要素である」

自然な英語 “The set of the numbers double of which are the elements of B and are the elements of A ”

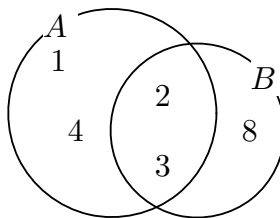
直訳英語 “The set of x , where $2x$ is an element of B and x is an element of A ”

言語構造は日本語よりも英語の方が内包的記法に近い。また、同じ母語であっても直訳母語の方が自然な母語よりも内包的記法に近いことに注意されたい。

さて、実験は以下のように行った。

まず、質問に先んじて次のような具体例と対応表を示し、外延的記法と内包的記法の規則を類推させた。

集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{2, 3, 8\}$ とします。このとき、次の説明に対する外延的記法と内包的記法は下の対応表の通りです。



説明	外延的記法	内包的記法
4より小さい A の要素全体の集合	$\{1, 2, 3\}$	$\{x x < 4, x \in A\}$
B の要素を3倍した数全体の集合	$\{6, 9, 24\}$	$\{3x x \in B\}$
A の要素の3倍に1を足した数全体の集合	$\{4, 7, 10, 13\}$	$\{3x + 1 x \in A\}$

対応表

内包的記法に関する説明は特に行わなかった。これは単に第二言語を聞かせてその聞き取りを調査する形態に似せるためである。

この類推に引き続き、正しい内包的記法を選べるかどうか調査した。被験者に行った質問を以下に示す：

問3 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{2, 3, 8\}$ とするとき、次に説明する集合を外延的記法と内包的記法でそれぞれ表しなさい。内包的記法については選択肢より選んで記号で答えなさい。ただし、該当するものがないときには、自分で考えて書いて下さい。

説明 2 倍したら B の要素となる A の要素全体の集合

外延的記法

内包的記法

ア $\{2x|x \in B, x \in A\}$

イ $\{2x = y|x \in A, y \in B\}$

ウ $\{A|2A \in B\}$

エ $\{x|2x \in B, x \in A\}$

オ 該当なし

この他、以下に示す集合について同様な調査を行った：

問1 A の要素であって、 B の要素でない数全体の集合

問2 A の要素を分子、 B の要素を分母とし、分子の方が分母より小さい分数（真分数）全体の集合

ここに揚げた質問文は自然な日本語による記述であるが、それぞれに対応する直訳日本語による記述も与えた。また、英語母語話者には、口頭説明を含め、すべて英語による調査を行った。

被験者は英語母語話者 6 名、日本語母語話者 59 名であり、いずれも集合記法に不慣れと思われる大学生を予備調査により抽出した。調査結果を表 1 に示す。各問について、母数は外延的記法に関して正答した被験者数、つまり母語による記述を正しく解釈できた被験者数である。

	自然な母語による記述			直訳母語による記述		
	問 1	問 2	問 3	問 1	問 2	問 3
日本語母語話者	85%	58%	22%	83%	78%	53%
英語母語話者	100%	50%	33%	100%	80%	100%

表 1: 内包的記法の正答率

結果の分析

日本語母語話者と英語母語話者を比較すると、ほとんどの問に対して英語母語話者が有利な結果になっている。また、自然な母語よりも直訳母語の方が正答率が高い。このことから、言語構造が近い方が数学記法への構造変換が容易のようである。^{*6}

特に問3「2倍したら B の要素となる A の要素全体の集合」の結果に注目する。外延的記法の正答率を含めた詳細を表2に示す。

	自然な母語による記述		直訳母語による記述	
	正答率 1	正答率 2	正答率 1	正答率 2
日本語母語話者	69%	22%	61%	53%
英語母語話者	50%	33%	67%	100%

正答率 1 は全被験者に占める外延的記法正答者の割合、

正答率 2 は外延的記法を正解した被験者に占める内包的記法正答者の割合。

表 2: 問 3 の正答率

自然な母語による記述を正しく解釈できた被験者 (正答率 1) は、日本語母語話者が英語母語話者を上回る。にも関わらず、内包的記法の正答率 2 は格段に下がる。つまり、日本語母語話者は数学的内容を自然な日本語で説明されれば正しく解釈できるが、それを数学記法として表せないことを意味する。そのような日本人学生が多いことを裏付ける結果となった。これは外国語が話せなくて自分の考えを正しく外国人に伝えられないようなものであり、1 節で述べた「理解しているにも関わらず記述ができないだけの生徒」が案外多いことを示唆しているようだ。

4 効果的な記法習得法

実験結果からもわかるように、日本語母語話者は英語母語話者に比べて数学記法の習得には不利のようである。本節では、日本語母語話者に有効な数学記法の習得法を探りたい。自然な日本語による記述よりも言語構造が類似する直訳日本語の方が数学記法への変換が容易だとわかったので、直訳日本語をうまく活用するのが得策だろう。先述の「 a 足す b は c 」も $a + b = c$ の直訳日本語であって本来の日本語ではない。これが違和感なく受け入れられるのは、母語獲得が完了する前に何度も聞かされた成果であると言えよう。母語獲得が完了した後では直訳日本語の語順は、自然な日本語になっている必要がある。例えば、 $\frac{dy}{dx}$ を上から下へ読むように語順を与え、「 y を x

^{*6} 第二言語習得研究によると、言語構造が似ているからと言って習得が容易であるとは一概に言えないそうである。あくまで数学記法と英語、日本語に関する結果である。

で微分する」と読ませれば自然な日本語を生成できる。四則計算は直訳日本語風に読んでもよいことを利用すると合成関数の導関数を求める公式は次のように読める：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

y を x で微分したものは y を t で微分したもの 掛ける t を x で微分したもの である

これを生徒に読ませるのではなく、教師が繰り返して読むのを生徒に聞かせる。このように、記号の順序に日本語を当てただけで自然な日本語を生成できる場合を選んで*7、教師が適宜読み聞かせるようにすれば、記法習得に多大な指導時間を奪われなくて済む。繰り返し読み聞かせることは、第二言語習得研究でいう肯定証拠を豊富に与えることになる。「ディーワイディーエックス」のような単なる音連続を聞かせるのに比べて、言語機能を活用させる意味で理にかなっている。

しかし、内包的記法のように直訳日本語の語順が自然な日本語の語順ではない場合はどうだろうか。

英語教育でも、英語の語順通りに日本語を当てる技法、直訳日本語を利用する指導法が報告されている [7]。森暢子氏の報告によると、日本人学生が英語を学ぶ際、英語と日本語の文法や表現の違いを理解していなければ、英文から直訳日本語を考えつくことはできないそうである。そればかりか、英語が理解できていない学生には直訳日本語を自然な日本語に変換することすら難しいそうだ。森氏は日英両言語における構造の違いを理解させるために、直訳日本語を介在させることは有効であるという。

数学記法の習得においても同様なことが言えるだろう。英語は句の中心となる主要部が先に来てそれ以外の補部が後続する言語構造である。日本語はその反対で、主要部が後に来る。内包的記法も $\{x|\dots\}$ で x の集合であることを先に述べるから、主要部が先に来る言語である。この点が日本語の構造と異なるが、それを顕在的に意識させる目的で直訳日本語「 x の集合であって、 \dots 」を用いることは有効であろう。英語教育の指摘を参考に、直訳日本語を作るのは生徒ではなく、教師が作って適宜読み聞かせるとよいだろう。

5 結論と今後の課題

数学記法習得の難しさは、異なる言語構造への変換の難しさに一因があることがわかった。数学記法の構造と近い言語を母語とする話者は記法習得が有利になる。日本語母語話者は英語母語話者に比べて不利な立場にあることがわかった。また、数学的内容を理解していながらそれを数学記号によって記述できないでいる生徒が少なくな

*7 ここで取り上げた公式は自然な日本語を生成できたが、微分の記号は自然言語の略記とは考えにくい。全ての数学記法が自然言語の略記というわけではないから、読み聞かせる記号は選ばれるべきだろう。

いことも実験の結果は示唆している。数学記法のコミュニケーションツールとしての役割は軽視できない。

言語構造を理解してはじめて母語で考えている内容の数学記号への変換が可能である。従って、数学記法と日本語の言語構造の違いに気づかせる必要がある。そのために数学記法の語順通りに日本語を当てた直訳日本語を利用することは有効である。筆者はこの直訳日本語や数学記号の読み聞かせの実践を開始しているが、効果を裏付ける調査はこれからである。3節で述べた実験についても、今回は英語母語話者の被験者を多く集められなかったため、今後も追調査を続けたい。

数学記法の習得について、生成文法理論や第二言語習得研究の見地から分析した。一例として内包的記法を取り上げたが、実際にはもっと複雑な側面がある。一般に、数学記法は言語構造の階層内部に数式処理が現れる点である。 \sum 記号はその顕著な例だろう。例えば、「1 から 9 までの奇数の和」を \sum 記号で表そうとすると、まず「奇数」を $2k - 1$ で表す必要がある。その上で $2k - 1 = 1$ と $2k - 1 = 9$ から初項と末項における k の値を知ってようやく $\sum_{k=1}^5 (2k - 1)$ を得る。直訳日本語を当ててみると、「 $2k - 1$ の k が 1 から 5 になるまでの和」となる。ここには自然な日本語に登場しない 5 という数値が現れている。 \sum 記号の階層には言語処理と数式処理が混在し、全体は言語構造を成しているようだ。このように、数学記法の習得においては言語と計算の複雑な並行処理が要求される。数学記法とは既存の言語理論だけでは分析しきれない特殊な言語であることがわかる。引き続き追究したい。

3節で述べた実験の被験者の一人が、感想欄に実験はまるでヘブライ文字を解読させられているかのような感じだと記している。数学の授業で同じような思いをしている生徒を一日も早くヘブライ文字の解読作業から解放したいものである。

謝辞

本稿の実験にあたり、日本語母語話者データに関しては天理大学の吉田智佳氏に、英語母語話者データに関しては甲南大学の Timothy J. Vance 氏にご協力を頂きました。心より感謝いたします。

参考・引用文献

- [1] 田村三郎「語学としての数学」『なぜ数学を学ぶのか』大阪教育図書 1993 年 pp. 23 - 37.
- [2] 銀林浩「数式の記号学」『数学セミナー (2月号)』日本評論社 1982 年, pp. 2 - 7.
- [3] 水谷静夫『言語と数学』森北出版 1970 年.
- [4] 福井直樹『自然科学としての言語学 — 生成文法とは何か』大修館書店 2001 年.
- [5] 白畑知彦『第二言語習得における束縛原理 — その利用可能性』くろしお出版

2006 年.

- [6] 中村 捷・金子義明・菊地 朗 『生成文法の新展開』 研究社出版 2001 年.
- [7] 森暢子 「英作文を書く時に直訳型日本語文を介在させることの効果」 第 34 回中部地区英語教育学会 富山大会 自由研究発表 2004 年 6 月 27 日.