

トリックは数学です

— 創作マジックの教材化 —

平井 崇 晴

大阪産業大学他 非常勤講師

数学の類題を作成しようとする時、単に数値や記号を変更するだけのものになりやすい。これに対してマジックなら素材を変更するだけでも見た目の異なるバリエーションを作りやすい。また、実際に演じてみることで答えの正当性を検証することもできる。ここに数学マジック創作の利点を感じられる。

さらに、数学的な理由がわからなくてもマジックをマジックとして純粋に楽しむこともできる。十分に堪能した後でじっくり理由や数学的原理を考えてもよいと思う。その意味で生徒が参加しやすい教材だと思われる。

ここでは、ある数学マジックを出発点にして実際に創作したいいくつかのアレンジを紹介する。その過程で数学的な内容を考察し、教材としての可能性を模索する。

1 類題学習とバリエーション創作

何らかの数学の問題を解かせた後で、その類題を生徒に作らせることは、数学的本質を見極める上で重要な学習であると言えよう。マジックのバリエーションを創る過程はそのような学習にも似ている。トリックの本質をおさえれば、アレンジが比較的容易な数学的マジックも少なくない。バリエーションを生徒に創らせることは類題作りに似た効果が期待でき、教材としての可能性が見られる。

しかも、独自のマジックを創る感覚は楽しいものである。単なる類題作りとはひと味違った創造意欲をかき立てることだろう。独自のマジックを完成させたときの達成感、生徒にも是非伝えたい感動である。

数学教育ではある問題に対してそのアレンジを類題、元の問題を原題とよぶ。これに対してマジックの用語では、アレンジのことをバリエーションという。以下、類題に対して元の問題を原題とよぶのと同様に、バリエーションに対して元になったマジックを原マジックとよぶことにする。

2 原マジック

次に示すマジックは [1] を元に作成したものであるが, 今 Magic 1 を原マジックとしよう.

Magic 1 (名刺のマジカルナンバー)

- ① 術者は名刺に記された右のような行列を示す.
- ② 「好きな数字を選んで○を付けて下さい。」
- ③ 「選んだ数の上下左右の数をセンを引いて消して下さい。」
- ④ 「まだ消えていない数の中から好きな数字をひとつ, また○を付けて下さい。」
- ⑤ 「先ほどと同様に上下左右の数を消して下さい。」
- ⑥ 「1 つの数が残りますが, この運命の数も○で囲んで下さい。」
- ⑦ 「○で囲んだ 3 つの数を足して下さい. その答はいくつですか?」
- ⑧ 名刺を裏返すと Magical Number にその値が記されている.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Magic 1 の原理を考えよう. 枠の外にカギとなる数値を図 1 のように配置する. 枠上の数値と枠左の数値の和が行列の各要素になっていることに注意する (図 2).

	1	2	3
0			
3			
6			

図 1

	1	2	3
0	1	2	3
3	4	5	6
6	7	8	9

図 2

さて, Magic 1 の手順で 3 数が選ばれるとすると, これらは各行各列から 1 つずつしか選ばれない. 行列の各要素はカギとなる数値の和になっているから, 選ばれた 3 数の和はこれら枠外の 6 数の和に等しい.

例えば, 要素 7 が選ばれたとすると, 各行各列から要素は 1 つしか選ばれないから, 7 を構成する数 1 と 6 は二度と加算されることはない.

こうして, このマジックで選ばれる 3 数の和は

$$1 + 2 + 3 + 0 + 3 + 6 = 15$$

より, 常に 15 となることがわかる.

3 バリエーション

Magic 1 の Magical Number は常に 15 となることがわかった。この値は行列の中央の要素 5 の 3 倍である。これはなぜだろうか。

枠外のカギとなる数値を図 3 のように変更すると、その理屈が見えてくる。

	4	5	6
-3	1	2	3
0	4	5	6
3	7	8	9

図 3

	$x - n$	x	$x + n$
$-m$			
0		x	
m			

図 4

一般化して図 4 に示されるようなカギから作られる行列であれば、常に Magical Number は中央の要素の 3 倍になる。

行列の要素がこのような配列になるように作ってもよいが、そうなっているものを探すとカレンダーがある。こうして Magic 1 のバリエーションとして Magic 2 が創作される。

Magic 2 (カレンダーの神秘)

- ① 術者はカレンダーを渡す。
- ② 「好きな月を選んで、そのカレンダーの中の正方形に並んだ 9 個の日付を枠で囲んで下さい。」
- ③ 「私は予言を紙に書きます。」
- ④ 「その枠で囲んだ日付の中から、好きな数字を選んで○を付けて下さい。」
- ⑤ 「選んだ数の上下左右の数をセンを引いて消して下さい。」
- ⑥ 「まだ消えていない数の中から好きな数字をひとつ、また○を付けて下さい。」
- ⑦ 「先ほどと同様に上下左右の数を消して下さい。」
- ⑧ 「1 つの数が残りますが、この運命の数も○で囲んで下さい。」
- ⑨ 「○で囲んだ 3 つの数を足して下さい。その答はいくつですか?」
- ⑩ 予言を書いた紙を開けてみると、ピタリと一致している。

2015 年 2 月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

カレンダーにおいては $m = 7$, $n = 1$ となっている。

サイズの変更も考えられる。 $2k + 1$ 次正方行列であれば、予言の数値は中央の数値

の $2k + 1$ 倍であることが容易にわかるが、カレンダーでは 3 次正方行列を作るのが限界である。4 次の正方行列を作らせれば以下のようなになる。

	$x - n$	x	$x + n$	$x + 2n$
$-m$				
0		x	y	
m		y'	x'	
$2m$				

図 5

	10	11	12	13
-7	3	4	5	6
0	10	11	12	13
7	17	18	19	20
14	24	25	26	27

図 6

図 5 枠外の数値を合計して

$$(x - n) + x + (x + n) + (x + 2n) + (-m) + 0 + m + 2m = 4x + 2m + 2n$$

であるから、この数値を予言の数とすればよい。例えば、図 6 では $4 \times 11 + 14 + 2 = 60$ である。

ところが、 $4x + 2m + 2n$ を速算することは容易ではない。そこで

$$4x + 2m + 2n = 2\{x + (x + m + n)\}$$

と変形すれば、これは図 5 において $2(x + x')$ に当たる。

$$4x + 2m + 2n = 2\{(x + n) + (x + m)\}$$

と変形すれば $2(y + y')$ に相当する。同様な変形をすることにより、予言の数は点対称の位置に配置された 2 数、 \bigcirc と \bigcirc' の和を 2 倍すれば求まることがわかる (図 7)。マジックを実演する際は、これらのうち足しやすい 2 数を選んで 2 倍すればよい。

	$x - n$	x	$x + n$	$x + 2n$
$-m$	a	b	c	d
0	e	x	y	f
m	f'	y'	x'	e'
$2m$	d'	c'	b'	a'

図 7

4 バリエーション 2

Magic 1 の別系統のバリエーションを考えよう。

Magic 1 の Magical Number は常に 15 であった。これを任意の数値、例えば常に誕生日などの日付や年齢、学籍番号等になるように行列を作成してみよう。

さらに、行列の各行各列から 1 つずつ選ばれるようにすればよいので次のようなバリエーションができあがる。

Magic 3 (俊光君専用マジック)

- ① 「これは俊光君専用のマジックです」
- ② 「ここに不思議な数が書かれた 12 枚のカードがあります。」と告げて、397, 380, 388, 385, 321, 304, 312, 309, 343, 326, 334, 331 のカードを 3 行 4 列に並べる。
- ③ 「あなたの誕生日は 2003 年 11 月 8 日でしたね。これらの数を 4 行目に付け足しましょう。」
- ④ 「これらを全部裏返します。」
- ⑤ 術者は 16 枚のカードをすべて裏返し、各列 4 行目のカードの上に 3 行目のカードを、その上に 2 行目、さらにその上に 1 行目のカードをのせて 4 つの山を作る。
- ⑥ 「山の並びを自由に入れ替えてください。」と告げて、4 つの山を自由に並べ替えさせる。
- ⑦ 4 つの山のカードをそれぞれ上から順に横 1 列に並べて再び 4 行 4 列裏向きのカード 16 枚を配置する。
- ⑧ 「お望みとあらば横方向にも混ぜますよ。」と言って、行方向にも ⑤-⑦ の操作を行い、改めて 4 行 4 列裏向きのカード 16 枚を配置する。
- ⑨ 「では、この中から一枚選んで裏向きのまま手に持って下さい。」
- ⑩ 1 枚選ばせたら術者はそのカードと同じ行同じ列にあった 6 枚のカードは取り除いて片づける。
- ⑪ 残った 9 枚のカードを 3 行 3 列に整えて「残ったカードからさらに一枚選んで手に持って下さい。」
- ⑫ 1 枚選ばせたら術者はそのカードと同じ行同じ列にあった 4 枚のカードは取り除いて片づける。
- ⑬ 残った 4 枚のカードを 2 行 2 列に整えて「残ったカードからさらにもう一枚選んで手に持って下さい。」

397	380	388	385
321	304	312	309
343	326	334	331
20	03	11	08

- ⑭ 1枚選ばせたら術者はそのカードと同じ行同じ列にあった2枚のカードは取り除いて片づける.
- ⑮ 「最後に一枚残りました. これも手にして, あなたが選んだ4枚のカードを表向きに並べてください. そして, 4つの数字を合計してみましょう」
- ⑯ 「ほら, ^{トシミツ}1043 になりましたね。」

他にも羽^{ハナ}柳 (87) さんや ひろみ^{ヒロミ} (163) さん, 三好^{ミヨシ} (344) さんなどの語呂合わせが考えられる.

合計に合わせたい数値を入力して行列を自動生成させるプログラムを組んでおけばパソコンやロボットに演じさせることができる [2].

5 バリエーション 3

各行各列の数値を合計するのではなく 掛け算するようになれば, 新たなバリエーションを創作できる. この場合, 素因数分解に関連付けることができる.

Magic 4 はそのようなバリエーションに基づいて神戸大学数学教育論 B の定期試験に出題した問題である.

Magic 4 (定期試験過去問)

下の各行各列から 1 つずつ数字を選び掛け合わせるとソチオリンピック開催の平成 26 年 2 月 8 日 (日本時間) に因んで常に 260208 になるように空所を埋めよ.

	39		
			278
	52		
2			139

6 今後の課題

ここに紹介した Magic 1-4 は大学における数学科教育法の講義で実際に扱ったものである. 学生にもマジックを創作させたが, 数学的に成立してもマジックとしては成立しないものもあった. 例えば, カレンダーを使えば行列のサイズはせいぜい 4 行 4 列である. これを 5 行 5 列以上のサイズで論じてマジックとしては実演不可能である. また, 速算も難解になる. 類題学習においても生徒が作成した問題の解答が題

意に合うか確認する必要がある。このような注意を喚起させることに関連付けて、数学的には考えられるが実演不可能なマジックについて整理してみたい。

和算にも左々立てや継子立てのようなマジックの要素を含むものが見られる。これらを現代風アレンジすることも考えたい。

参考文献

- [1] マーチンガードナー (竹内 郁雄 訳) 『aha! Gotcha ゆかいなパラドックス 1』日経サイエンス 1982 年.
- [2] 『トゥデイズ・スペシャル』任天堂 DS カセット「マジック大全」