第 52 回 近畿数学教育学会例会 ポスター発表

数学を体感せよ!

— いくつかの授業実践報告 —

平 井 崇 晴 *
(甲 南 大 学)

平成 24 年 9 月 22 日

頭で考えるだけでなく, 実際に手や体を動かす授業を心がけている. パズルのように「操作」を伴う題材は好ましい教材となる. 大学や専門学校でこれまで実践してきたいくつかの教材を紹介する.

「ストーンの折り紙六角形」はたたみ変えることによって次々に新しい面を出現させる正六角形のパズルである. その規則性にも着目させ, 単なる試行錯誤に終わらない数学的態度の習得に結びつけたい. 「織って作る多面体」は帯状の紙片を織り込むだけで正多面体を作るパズルである. 立体がどのように見えるのか, 面と面の位置関係にも着目させたい.

数学を解くだけでなく, 数学を体感する喜びを伝えたい一心で授業を実践してきた. これからも数学の魅力を伝えられる教材の開発を続けたい.

1 ストーンの折り紙六角形

ストーンの折り紙六角形 (ヘキサフレクサゴン) に関しては [1] に詳しい. これはたたみ変えていくと次々に新しい面が出現する正六角形のパズルである. ここでは, 主に 3 面折りと 6 面折りのものについて述べる.

3 面折りの折り紙六角形は図 1 を用いて作成する. 図 1 を切り取るのであるが, 太線は太いまま残すように注意する. 切り取ったらカッコ内の数字を紙片のちょうど裏

* takaharu.hirai@nifty.ne.jp http://homepage2.nifty.com/takaharu_hirai/

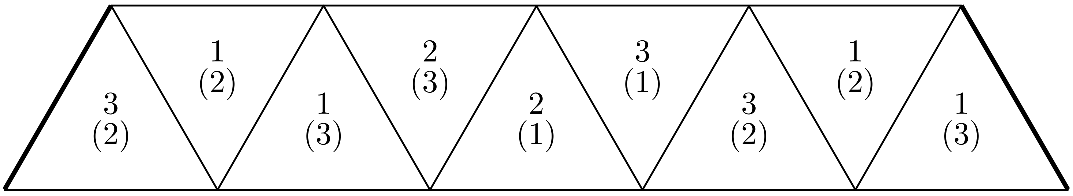


図 1: 3 面折り

側に記入する (以降はカッコ付き数字は無視する).

次に図 2 のように面 3 が中あわせになるように a-b を谷折りする. a-b を谷折りしたらそのまま全体をひっくり返す. すると, また面 3 が隣り合わせになっている箇所が現れる (図 3). そこをまた中あわせになるように c-d を谷折りする.

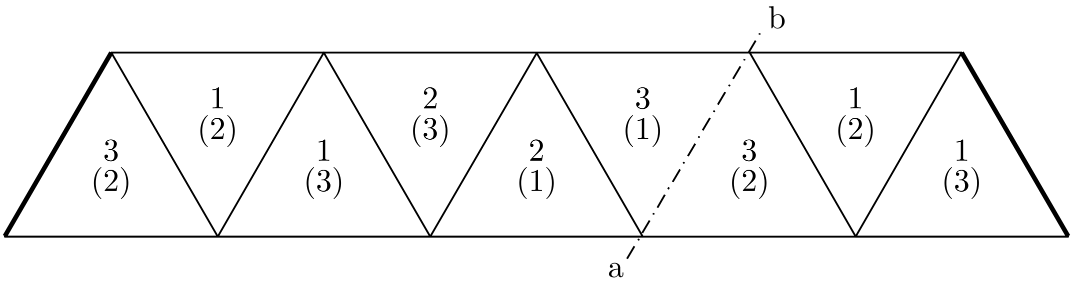


図 2: 表面の面 3 を中あわせに折る

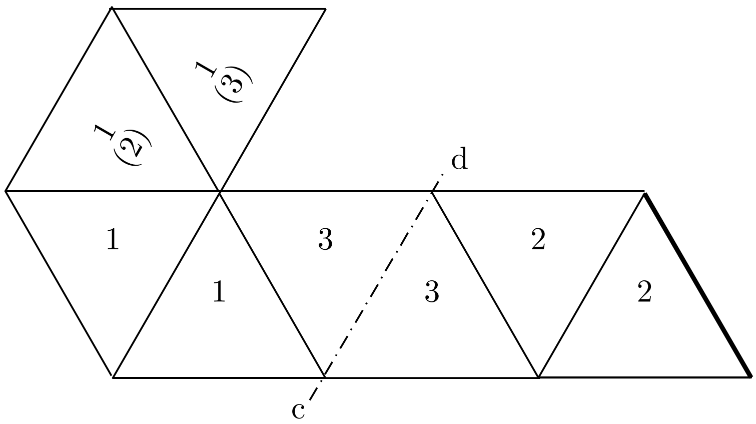


図 3: 裏面の面 3 を中あわせに折る

これで形は正六角形になる (図 4). 最後に残った面 3 を中あわせになるように紙片の両端を入れ替え, 太線と太線が重なるようにセロテープで留める. 構造的にはメビウスの 1 回ひねりと同じになる. これで面 1 と面 2 だけが表出している折り紙六角形ができあがる (図 5). できあがった折り紙六角形は線に沿って山折り谷折りを繰り返し, 折り癖をつけておくとよい.

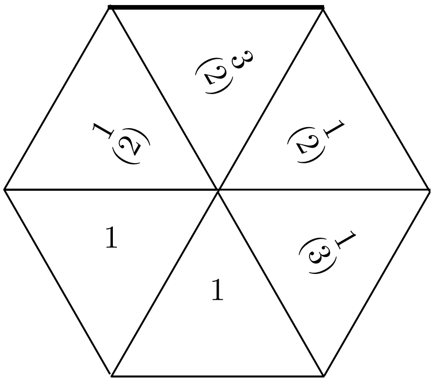


図 4: 残った面 3 を中あわせに折る

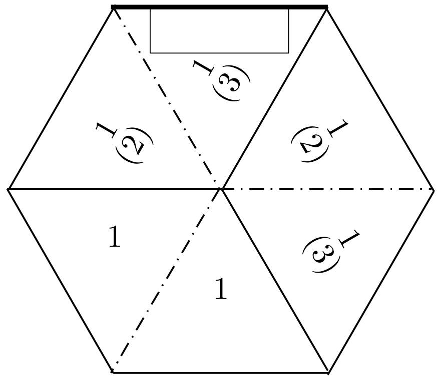


図 5: できあがり

新しい面を表出させるには．図 5 の実線を山折り, 破線を谷折りすると真ん中から自然と面 3 が表出する．同様の操作を繰り返すと, 面 1 → 面 2 → 面 3 → 面 1 → 面 2 → 面 3 → 面 1 → ⋯ が順に現れる．6 面折り以上になると, 複数の数字が同一面に出現してしまうことがあるが, これは表出のさせ方を失敗しているので, 注意が必要である．

さて, 3 面折りを元にして 6 面折りの折り紙六角形を作ろう．今度は 18 個の正三角形が並んだ紙片を用意し, 3 面折りの型紙から図 6 に示すように 2→ 3→ 1→ 2→ 3→ 1→ 2→ 3→ 1→ 2→ 3→ 1→ 2→ 3→ 1→ 2→ 3→ 1 と数字を拾って記入する．そして, 裏面の数字として新たに (4) → (4) → (5) → (5) → (6) → (6) → ⋯ を

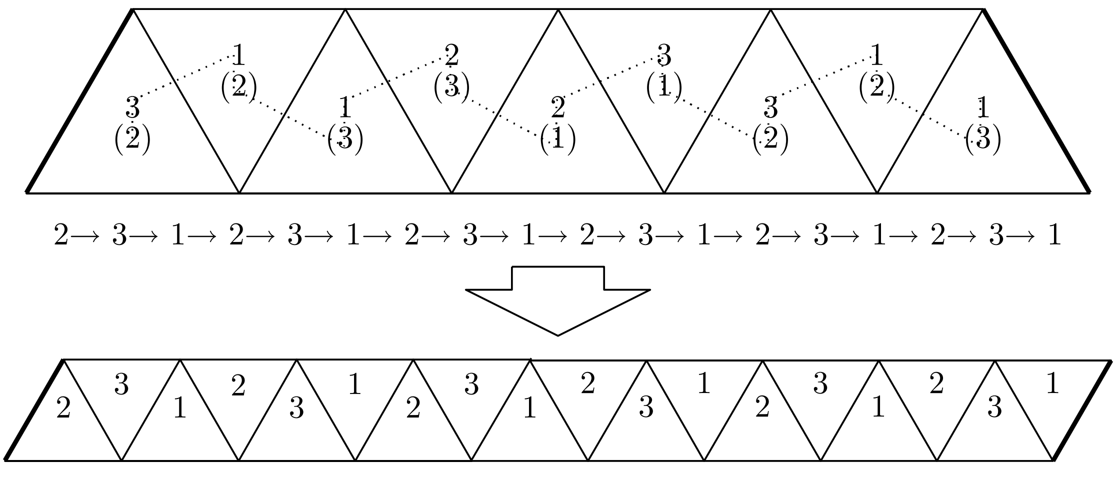


図 6: 数字を拾う

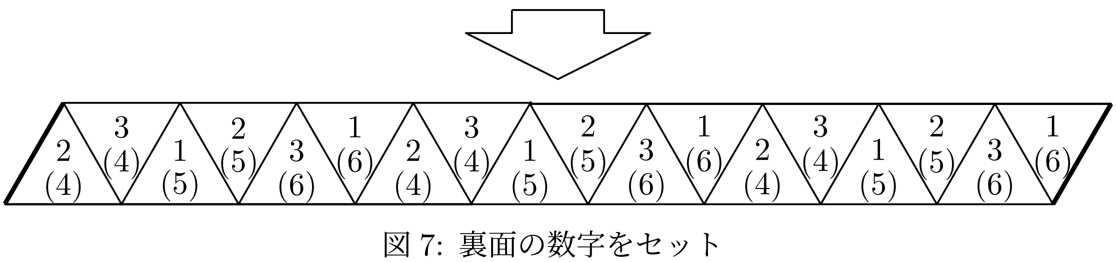


図 7: 裏面の数字をセット

セットする. これで型紙は完成する (図 7).

6 面折り紙六角形を折るには, 4, 5, 6 の数字を紙片裏面に記入して図 7 を裏返し, 紙片右端から 4 と 4 を中あわせ, 5 と 5 を中あわせ, 6 と 6 を中あわせ, $\cdots$ を繰り返し折りたたんでいく. クルクルと紙片を巻き上げていくような感じになる. 4, 5, 6 の数字が紙片内側に隠れてしまうと, 型紙は図 1 に帰着している. したがって, あとは 3 面折り紙六角形と同じ要領で 6 面折りを完成させることができる. 12 面折り以降も同様の要領で作成できるが, 太線が折りたたんだ内側にくるので太線同士をセロテープでつなげるには少し苦労する.

6 面折り紙六角形も初期状態は面 1 と面 2 だけが表出している. 面 3 を表出させるには 3 面折りのときと同様である. 面 4 を表出させるには面 2 と面 3 が表出された状態を作り, 山折りと谷折りを変更させれば面 4 を出現させられる. 面 1 と面 2 が表出された状態で山折りと谷折りを変更させれば面 5 が, 面 3 と面 1 が表出された状態で山谷反転させれば面 6 がそれぞれ表出される. このように面が表出される順を図示したものが図 8 である. この推移図を念頭に置くと好きな面を表出させやすい. いわば, 折り紙六角形の解である.

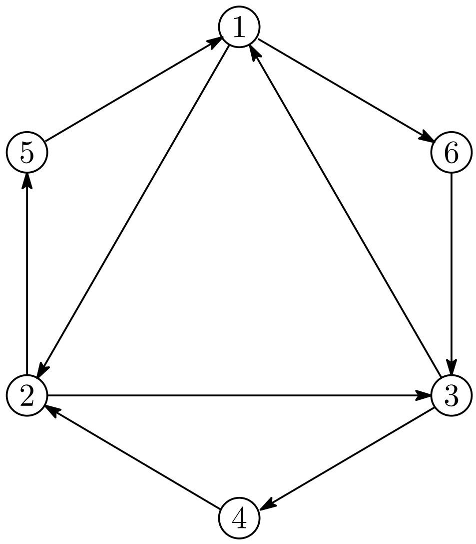


図 8: 6 面折りの推移図

折り紙六角形を授業で扱ったときは, 3 面折りで新しい面の起こし方を練習させ, 6 面折りに挑戦させた. そうして面 4, 面 5, 面 6 の順に表出させ, その度にチェックを受けにくるように指示した. 試行錯誤の結果, 偶然に表出したものを見せにくるのではなく, 規則性やアルゴリズムに気づきある程度の意図をもって表出させたものを見せにきなさいというわけである. このとき, 授業者自身がいとも簡単に面を次々と表出させてみせると, 何らかの規則があるのではないかと考えさせることができた様子であった. 推移図まで書いてみようとする学生までは現れなかったが, 頃合いを見て指示を与えてもよいだろう. ただし, 最初から推移図を意識させすぎると今度は試行

錯誤から自由性を奪いかねないので注意が必要であろう.

正三角形を増やし, 6 面の時と同様に数字をセットしていけば 12 面折り, 24 面折り, $\cdots$ と型紙を作成することができる. しかし, 6 面折り以上は作成だけでも手間暇がかかるため, 授業中に扱うことは時間的に困難である. また折り紙六角形に厚みがでてくるため, 24 面折りが限界のように思える. 実際には 24 面折りの実物で面 24 の表出を実演して推移図 (図 9) を紹介するにとどまった. 関心は大いに持ったようである.

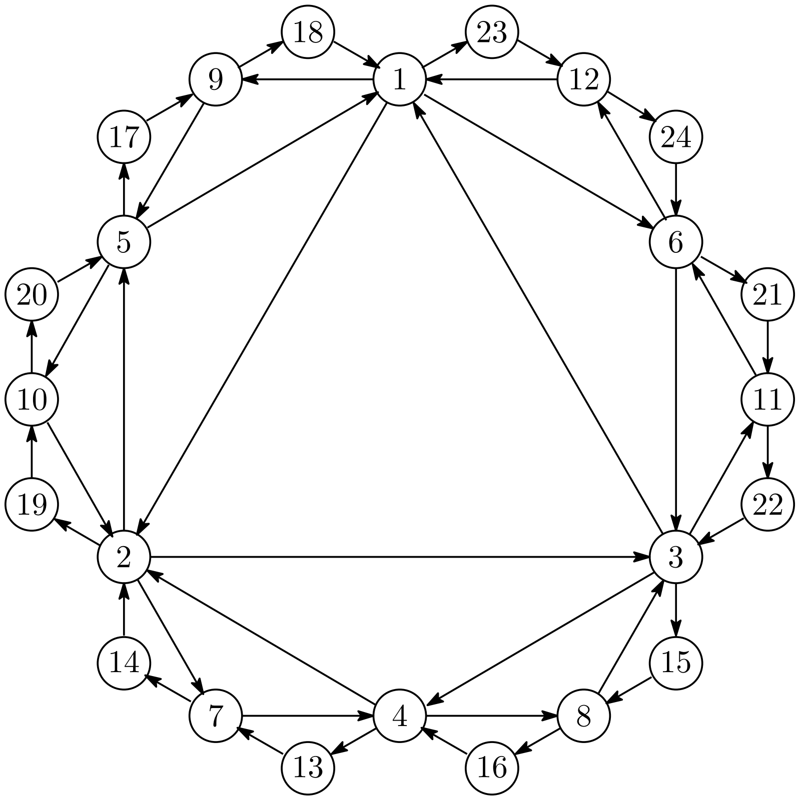
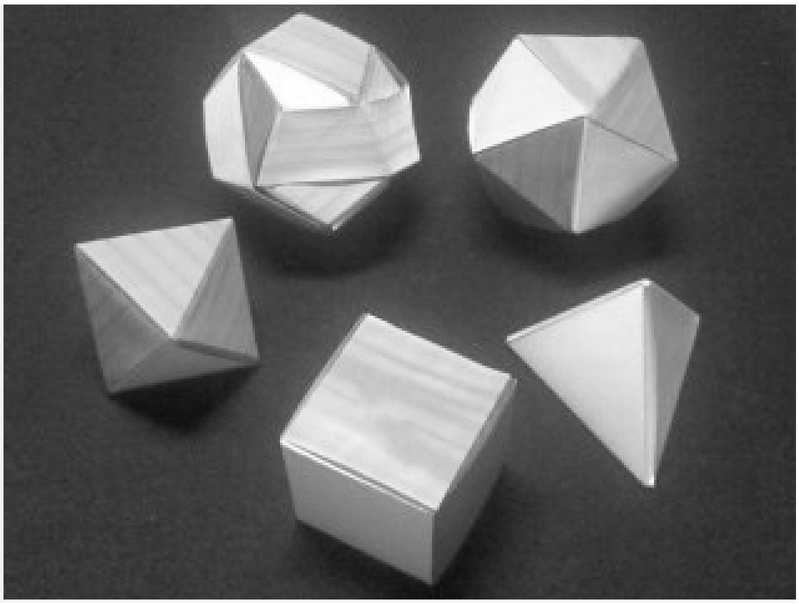


図 9: 24 面折りの推移図

2　織って作る多面体



織って作る多面体は [2] に紹介されている．添付資料にあるような色分けされた帯状の紙片を, のりやセロテープなどの接着剤をいっさい使わず, 織り込むだけで正多面体を完成させるものである．このとき, 以下の条件を満たすように作成する．

(1) 各辺は少なくとも一度は紙片と交わっていること, すなわち, どの辺も隙間になっていないこと．
(2) できあがった立体の表面に現れる色は, 各色同面積であること．

[2] によれば, これら 2 条件を満たすとき, 正多面体を作成するのに必要十分な紙片の数は正四面体なら 2 枚, 立方体は 3 枚, 正八面体は 4 枚, 正二十面体は 5 枚, 正十二面体は 6 枚であることが証明されている．立方体には解が 2 通りあるので, 授業では

(3) 対面が同色であること．

を満たすものを作るように制限を与えた．なお, 正二十面体と正十二面体も対面同色にできる．これを告げると正二十面体や正十二面体にも「対面」がある事実に感動する学生もいる．

授業では正四面体づくりを練習台にして, 条件が満たされていることを確認する．立方体の作成からが本題である．できた者から提出し, 次の課題に取り掛かる方式にした．立方体も多くの学生が比較的容易に作成できたが, 正八面体からはうまく作れない学生が目立つ．四面体を 2 つつなげたような 6 面しか持たない立体を作って「できた」と主張する学生もいた．90 分の授業では概ね正八面体までを課するのが量的にもほどよい様子であった．45 分の授業でもカラー印刷して予め紙片を切り離したも

のを用意しておけば, 正八面体まで扱えるのではなかろうか.

正二十面体と正十二面体は自由課題として翌週提出するよう指示した. その際, 携帯電話で写真を撮っておくように告げると, 意欲ある学生は熱心に何方向からも撮影していた. 実際に作り上げてくる学生は正二十面体に関しては毎年数名ほどいる. 正十二面体は 10 数年の間に 4, 5 名ほどしかいない.

このパズルは正解となる正多面体を正しく思い描けていないと完成は難しい. 紙片はどれも「赤道」になるように配置されるとか, 正二十面体はある方向から見れば正 5 角形が見えるとか, イメージをたどりながら作成する必要がある. 正多面体の性質をイメージとつなげるよい訓練になると思われる. 単に展開図から立体を作成するのと違って, 失敗の可能性を含む教材の優れるところではないだろうか.

授業中はすべての多面体を展示し, 自由に手にとって観察しにくるように指示すると, 各自それなりに着眼点を持って観察しているようであった. 「よく見なさい」と言うだけでは何を見ればよいかわからないものであるが, 形を観察する姿勢や目の付け所を意識する習慣も身に付くように思える.

3 その他の実践とまとめ

その他, 変わった実践では「体育会系数学研究会」がある. 学生の有志が作ったサークルの類であるが, この活動顧問を担当した. 活動はわずか 1 年ほどで残念ながら現存しない.

これは数学の問題を効率よく解くのではなく, 実際にやってみて, 体を使って解いてみようという試みである.

例えば, 大相撲巴戦の優勝確率 (原題は神戸大学 (理系) 昭和 61 年度入試問題) を求めたことがある. 巴戦とは最初 A, B の力士が対戦し, 勝った方が控え力士 C ともう一度対戦する. 力士 C が負ければ 2 連勝した力士が優勝であるが, そうでなければ C と残りの力士が対戦する. これを 2 連勝する力士が現れるまで繰り返すのである. 実際に確率を求めてみると, A, B が優勝する確率は $\frac{5}{14}$, C のそれは $\frac{4}{14}$ である.

3 チームに分かれて 2 チームは思考によって普通に解くことに挑戦し, 残り 1 チームはひたすらシミュレーションを行わせた. 最初はじゃんけんを繰り返す. 飽きてきたら, トランプやコインなどを利用する. 数学的にはよろしくないが, 腕相撲や指相撲, 紙相撲なども行った. いざとなればその試行結果だけ除外すればよいのだし, 授業ではないので, そういった「遊び」も許した. それでもどうやら巴戦は平等ではなさそうだと予想を導くことはできた.

数学は「解く」ものだ, それも正しくなければならない, 完璧を要求されるという印象が強い. 完全には正しくなくても実際に問題を体験してみることは, 解法の糸口や規則性の発見につながることも少なくない. その問題の魅力や難しさの本質に触れることもあろう. 数学者や科学者が失敗を恐れずにやってみよと口にする理由がよくわ

かる．近年, 白紙答案を書く生徒が多いというが, これを解消するヒントもここにあるのではないか．

数学を体感させる授業で心がけていることは, 授業者も一緒に体感することである．折り紙六角形では, 新しい面を起こす実演をする．織って作る多面体でも, 学生と一緒に競って作る．楽しいから一緒に野球しよう, というのと同じ感覚で楽しさを共感することである．そういう姿を見せることこそ, 難問にくじけそうな学生へのエールになっていると確信する．

なぜ数学を学ぶのか．楽しいから学ぶのではなかったか．そして楽しめている者には, なぜ学ぶのかなどという疑問は生じないはずだ．計算や問題を解く能力は重要である．しかし, その結果をさらに高め発展させていくように突き動かす原動力は知的好奇心であろう．時に応じて, 数学を体感させる教材を与えることはその原動力を思い出させるよい機会になるだろう．

参考・引用文献

[1] 西山豊「ヘキサフレクサゴンの一般解」大阪経済大学論集 第 54 巻第 4 号, 2003 年 11 月.

[2] マーチン・ガードナー 著 赤 攝也・冬子 訳『数学ゲーム II』(日経サイエンス社).

コメント欄

ご意見・ご感想などご自由にコメントください.

よろしければ連絡先をお願いします.

お名前：______________________________

メールアドレス：______________________________

ありがとうございました.