

第二言語としての数学

平井 崇晴*

コンピュータ日本学院専門学校

平成 17 年 5 月 15 日

Abstract

数学記法が略記から生まれた事実を鑑みると、数学 (数学記法) は言語的な側面を持つと考えられる。その意味で、日本人数学学習者は数学の内容理解以前に数学記法という第二言語の習得が求められていると言える。数学記法の習得が言語習得であるなら、外国語教育で行われているような手法を数学記法の習得にも適用したり、第二言語習得理論において提案されている仮説から数学記法の習得状態を考察したりすることは、数学教育上の効果を期待できるのではないだろうか。¹ 本稿ではその可能性を指摘する。

1 数学記法を言語と捉える根拠

数学記法のいくつかは自然言語の略記から生まれている。例えば、加法の $+$ 記号は英語の *and* に当たるラテン語の *et* を早く書いたものが、記号として定着したと言われている。減法の $-$ 記号は *minus* という語の頭文字 *m* を速記したものが始まりだという説がある。このように、数学記法の元が自然言語であるのだから、数学記法を言語と捉えても不自然ではない。

根号 $\sqrt{\quad}$ は、*root* の頭文字 *r* を元にした記号であるが、 $\sqrt{3}$ は *square root of three* の語順通りに根号が先に書かれている。日本語「三の平方根」に従えば根号は後に書くことになる。面白いことに、分数を書くときには欧米人と日本人には顕著な違いが見られる。日本人は通常 $\frac{2}{3}$ を書くとき、分母の 3 を先に書いてから分子の 2 という順に、下から上へ書く。これは日本語「三分の二」の語順を反映している。ところが、欧米人の多くは上から下へ、分子を先に分母を後に書く。これは *two over three* の語順に従って書いているのだろう。話者の語順に従って記号を並べる点も数学記法の言語的な特徴が見られる。

このように、数学記法は言語と密接に関係している。数学を言語と捉えるならば、これを母語とする民族は存在しないから、数学は **第二言語** であると言えよう。

2 第二言語習得との関連性

数式はヨーロッパ系の日常語に忠実に翻訳しながら読むことができる [1]。ヨーロッパ系言語の語順と数学記法にはきれいな対応が見られるからである。例えば、 $a + b = c$ は “*a and b makes c*” のように、英語の語順通りに記号が並んでいることがわかる。日本語では「*a* に *b* を足すと *c* になる」となるはずで、この順に記号を並べると “ $ab + c =$ ” となろう。

*takaharu.hirai@nifty.ne.jp http://homepage2.nifty.com/takaharu_hirai/

¹本稿において、第二言語習得理論と言えれば主に日本語母語話者が英語をターゲット言語とする場合を指し、外国語教育と言えれば主に英語教育を意味している。

数学を第二言語として捉えると、ターゲット言語の語順が英語母語話者にとっては母語と同じであるが、日本語母語話者にとっては異なる。語順は言語の構造に関わるから、両者の習得過程は大きく異なるに違いない。ここに第二言語習得理論との関連性を感じる。

数学記号が母語と同様に読めたら、意味内容の把握はどれだけ楽なことか。例えば、 $\sum_{k=1}^n a_k$ を英語では “The sum of a_k from k being equal to 1 to n ” と読む。和を表す \sum は “sum” の頭文字 ‘s’ に相当するギリシア大文字であり、これに a_k が続くので “sum of a_k ” との対応が自然である。“from” 以下の k に関する詳細はやや小さめの文字で表現されている。 \sum 記号にはこのような意味内容に関する情報が英語の語順に沿って記載されている。日本の高校教科書を見ると、次のように説明されている： $\sum_{k=1}^n a_k$ は k が $1, 2, 3, \dots, n$ と変わったときのすべての a_k の和を意味する。日本語で意味を解釈しようとする、語順の違いから記号に記載されている情報を読み取るのに負担を強いられる。 $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$ を日本語で「 k が 1 から 10 になるまで k^2 を合計すると 385 になる」と解釈するのと、英語で “The sum of k^2 from k being equal to 1 to 10 equals 385” と解釈するのでは、英語の方が記号を素直に読むだけでよいため情報の読み取りに負担が小さい。記号順に読むだけで母語での解釈が容易であることは数学の内容理解にも影響を及ぼすであろう。 \sum 記号が苦手な日本人高校生が多いこともうなずける。

3 数学教育への影響

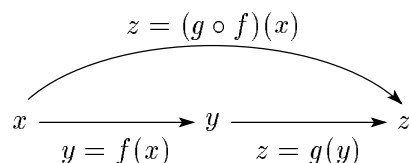
数学記号が母語と同じ構造を持つか否かは、数学を学ぶ上でも影響しているように思われる。これを裏付ける興味深い調査がある。

日本語は数の読み方が 10 進法になっている。ヨーロッパ系の言語は 10 進法、12 進法、20 進法が混在している。例えば、81 は 8 つの 10 と 1 であるが、日本語「ハチジュウイチ」はこの構造に対応している。しかし、フランス語では「4 つの 20 と 1」と読む。小学校で習う四則計算は 10 進法だから、四則計算には日本語が有利だと予想される。

これについて大谷泰照氏の調査がある ([1] に紹介されている)。この調査は次のようなものである。アメリカ在住の日本人小学生を調査したところ、暗算に日本語を使う子どもは、暗算に英語を使う子どもより有利な結果が得られた。また、日本在住のアメリカ人、カナダ人小学生を対象に行った同様な調査でも、暗算に日本語を使う子どもの方が有利な結果が得られたそうである。数学記号が母語と同じ構造を持つと数学上も有利だと物語る調査である。

前節の冒頭で紹介した “ $a + b = c$ ” のようなヨーロッパ系言語に準じた記法はポーランド記法と呼ばれる。一方、“ $ab + c =$ ” のような日本文式記法は、逆ポーランド記法と呼ばれている。多くの数学記号はポーランド記法によるが、各々一長一短がある。

逆ポーランド記法は操作順に記号が並ぶのに対し、ポーランド記法は必ずしもそうではない。そのため不自然な記号順になる。典型的な例が合成関数の記号 $g \circ f$ である。「 x に f を施してから g を施した関数」が合成関数 $g \circ f$ であるが、施すのとは逆順に記号が並んでいる。「 x の関数 f 」をポーランド記法 (function f of x) で $f(x)$ と書くので、記号 $g \circ f$ は $g(f(x))$ に準じたのだろう。



操作順に語が並ぶ逆ポーランド記法に慣れた日本人には、逆順に書く必然性を感じ取りにくい。

ポーランド記法と逆ポーランド記法の二通りの記法を持つ数学記号がある。2変数関数 $z = f(x, y)$ を偏微分する際に用いられる記号で、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と z_{xy} である。どちらも「 z を x で偏微分してから y で偏微分する」意味であるが、日本人大学生は日本語の読みに応じた後者の記法を圧倒的に支持する。このように、操作順に記号が並ぶ点に関しては日本語的な逆ポーランド記法が優れている。

ところが、数学は何も操作の順ばかりが重要ではない。本質を先に述べることはとても数学的な行為である。ポーランド記法は後置修飾的、いわば head initial な記法である。例えば、「 $s(x)$ の x に t を代入した結果」を表す $s[t/x]$ は、日本人にとっては t と x の位置が逆である。英語だと “ t instead of x ” の語順通りで読みやすい。それだけでなく、この記号 $s[t/x]$ は、代入の結果 t だけが残っていることを強調している。これが本質を先に述べる head initial なポーランド記法の利点である。 $\sum_{k=1}^n a_k$ も「和に関する言明である」と最初に述べている。

集合記法でも、内包的記法と呼ばれる記法は本質を捉えるには好都合である。日本語「 A の元 a と B の元 b の対 (a, b) 全体の集合」は、最後まで読まない (a, b) という形をしたものばかりを集めた集合のことだとわからない。ところが、“The set of (a, b) satisfying that a is an element of A and b is an element of B ” だと、最初の方で (a, b) という形をしたものが元であるという本質がつかめる。内包的記法 $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ も本質を先述している。

母語がポーランド記法的な欧米人は、後置修飾に慣れ親しんでいる。本質を先述することが日常的に訓練されているわけであるから、数学的な考え方のトレーニングを幼少から積んでいると言っても過言ではない。日本人はこの差を埋める必要がある。日本語（逆ポーランド記法）と数学記法（ポーランド記法）の相互変換を自由自在に操れるように教育する工夫が、数学教育上求められるのではないだろうか。第二言語習得理論や外国語教授法に学びたい。

4 英語教授法の適用

ポーランド記法の数学記号に対して、直訳日本語を当てる先人の智慧が見られる。 $a + b = c$ を記号順に日本語訳するために「 a 足す b は c 」のような直訳を考案した。 $a < b$ は、英語だと a is less than b の ‘less’ に記号 ‘<’ が対応してくれるが、日本語では「 a は b より小さい」となり、‘<’ の位置が「小さい」に合わない。日本人は、苦心してこれを「 a 小なり b 」と読んでいた。記号が話者の語順通りに並ばないと不自由である証拠だろう。

全ての数学記号に日本語の語順を対応させられればよいのだが、どうしても限界がある。 $\sum_{k=1}^n a_k$ など、いくつかは記号順に対応する直訳日本語が見当たらない。

直訳日本語があるために、かえって混乱を招きそうな例もある。 $\exists y \forall x (x + y = x)$ は “There exists y such that for any x x and y makes x ” のように、英語のまま読める。日本ではこれを「ある y が存在して、任意の x について x 足す y は x である」のように記号順に苦勞して読む。しかし、この日本語はよくわからない。ひとまず、 $x + y = x$ をそのまま残して全体を自然な日本語に直してみると、「どんな x に対しても $x + y = x$ であるような y が存在する」となる。ところが、この日本語は「どんな x に対しても」のかかる範囲が二通りある曖昧な文である：

- (どんな x に対しても $x + y = x$ である) ような y が存在する
- どんな x に対しても ($x + y = x$ であるような y が存在する)

これでは, $\forall x \exists y(x + y = x)$ との区別をつけられない. 英語では, “For any x , there exists y such that x and y makes x ” であり, 作用域に注意すれば $\exists y \forall x$ との違いがわかる. このように, 先ほどの直訳日本語は日本語としての意味がよくわからない.

英語教育でも, 英語の語順通りに日本語を当てる技法, 直訳日本語を利用する方法が報告されている. このような教育上の工夫を数学教育でも活かさないだろうか.

森暢子氏の報告によると, 日本人学生が英語を学ぶ際, 英語と日本語の文法や表現の違いを理解していなければ, 英文から直訳日本語を考えつくことはできないそうである [2]. そればかりか, 英語が理解できていない学生には直訳日本語を自然な日本語に変換することすら難しいようだ.

数学記号を読む場合も同様ではないだろうか. 上述の例, $\exists y \forall x(x + y = x)$ の直訳日本語「ある y が存在して, 任意の x について $x + y = x$ である」を自然な日本語に読み直すとき, 元の数学記号の構造を全く意識せず直すから数学的には別の意味になってしまうのである. 数学を教える側は直訳日本語も日本語だと思って授業しているが, 学生にとって直訳日本語は数学記号と何ら変わらず, 自然な日本語としての正しい解釈ができないのは容易に想像がつく.

森氏の報告を参考に, 記法の構造を意識した指導に関する調査を試みた. 被験者は集合記号を何年も見慣れてきたはずの理工学部 3, 4 回生 (26 名) である. ある集合について述べた日本語を, 元を列挙する外延的記法と呼ばれる集合記法と前述した内包的記法の両方で書かせた. 外延的記法の正答率が 100 % であったから, 全員が日本語を正しく理解していることがわかった. ところが, 内包的記法の正答率は 15 % であった. つまり, 思っていることを内包的記法で表せない学生が驚くほど多いということである. そこで, 集合について述べられた日本語から head に当たる語を探させ, 内包的記法はそれを先に書くのだと構造を意識させる説明をした. 翌週, 同様な調査を行うと正答率は 58 % に上がった. いささか厳密性を欠く調査になってしまっているのだが, 記法の構造について意識させると正答率が上がったことになる.

森氏は日英両言語における構造上の違いを理解させるために, 直訳日本語を介在させることは有効であるが, 実際に英作文を行う段階になると必ずしもその必要はないという. このような英語教育上の指摘は大いに参考になる. 数学記法の構造理解のために直訳日本語を利用し, 学習者が直面する言語的側面に関する困難を早期に解決する. そうしてようやく数学的内容そのものを扱う本題に立ち入ることができる. 言語的側面にいつまでも振り回されることのないよう, 第二言語習得理論や外国語教授法を有効に利用したい.

5 展望

日本人数学学習者が数学記法を苦手にすることは言語習得理論的にも裏付けができそうである.

言語としての数学記法は自然言語に比べ極めて単純である. 文法項目は語順と作用域くらいしか見当たらない. もし, Full Transfer Full Access の立場をとるとすると, Full Transfer の時点で英語母語話者は数学記法の文法項目についてターゲット言語の状態と全く同じと言ってよい [3, 4]. パラメータの再設定が必要ない. これに対し, 日本語母語話者の初期状態はターゲット言語とパラメータ値が全く違うであろう. そのため, パラメータ値の再設定が負担となり, 日本人数学学習者が数学記法を苦手とする要因となり得る.

ところで, これまで数学教育に第二言語習得理論や英語教育の手法を応用することを述べてきたが, 逆方向の応用も考えられる. つまり数学学習者の記法習得状態を観察することによって, 注目の文法項目が自然言語でどのように習得されていくのか, 予測や確認ができるのではないか.

このように, 第二言語習得と数学教育相互の研究が互いの発展につながるように思われる.

謝辞

本研究は、「学習者の習得段階における中間言語の記述と予測 (1)」の一環であり、天理大学学術研究助成費の補助を受けて行われています。

参考・引用文献

- [1] 田村三郎 (1993) 「語学としての数学」『なぜ数学を学ぶのか』 pp. 23 – 37, 大阪教育図書.
- [2] 森暢子 (2004) 「英作文を書く時に直訳型日本語文を介在させることの効果」第 34 回中部地区英語教育学会 富山大会 自由研究発表, 2004 年 6 月 27 日.
- [3] Schwartz, B.D. and R. Sprouse (1996), “L2 cognitive states and the full transfer /full access model”. *Second Lanugage Research* 12 pp. 40 – 72.
- [4] White, L. (2003), *Second Language Acquisition and Universal Grammar*. Cambridge: Cambridge University Press.