第 49 回　近畿数学教育学会　例会

倍半変換ゲーム
— 倍半変換の教材化 —

平成 23 年 2 月 19 日

平　井　崇　晴
甲 南 大 学

本稿は, 倍半変換問題と称する数学パズルのゲーム化を試みる究研である. ゲーム化して与えることにより, 生徒の探求心を揺さぶる教材として機能することをねらいとする.

倍半変換問題とは, ある規則に従って自然数の変換を繰り返し, 目的の数に到達させる問題である. 数学的な魅力だけでなく, 規則性や操作性の観点からそのまま教材としての価値も認められる問題といえる. しかし, その魅力に気づく前に探求を放棄してしまう生徒も少なくないと予想する. そこで問題をゲーム化し, 勝つための戦略に着目させたい. 戦略分析が倍半変換の探求に直結するからだ.

倍半変換は教材としての価値がある一方で, その操作が位取り法に違反するという指摘もある. 教材提示の工夫や変換規則の改良などにより, 今後一層の洗練をはかりたい.

1　倍半変換

屯候氏の考案した **倍半変換** [1] とは次のようなものである. すなわち, 10 進記数法で表された自然数 $\cdots\mathrm{A}\cdots$ のある部分 A について, 2 倍するか 2 で割った値を A のところにはめ込む変換である. 例えば $3141\underline{592}6$ は, その一部 592 を 2 倍して $3141\underline{1184}6$ に変換できる. あるいは 2 で割れば $3141\underline{286}6$ に変換できる.

このような変換を繰り返すと, ある数から他の色々な数へと変換が可能である. 例えば, 2011 から 23 へは図 1 のように倍半変換可能である.

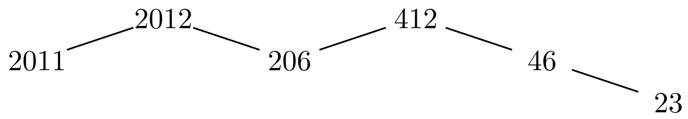

図 1　2011 から 23 への倍半変換

図 1 において “倍変換” した数は上方へ, “半変換” した数は下方へ表記している.

ある数から異なる数へといつでも到達可能であるか, また到達可能ならば必要最小限の変換ステップ数はいくつか等々, 数学的興味は尽きない. このように, 数学的な面白さを含む題材はよい教材となることが期待される. 本稿では **倍半変換問題の教材化** を考察し, そのひとつの方法として **倍半変換ゲーム** を提案する.

2 数学的考察

倍半変換の性質を以下に示す. 詳細は [1] を参照されたい.

以降, 自然数 a から 自然数 b へ倍半変換可能であるとき, $a \equiv b$ と表すことにする.

定理 1 (倍半変換可能性)

(1) n を 5 の倍数ではない自然数とすると, $n \equiv 1$ である.
(2) n を 5 の倍数とすると, $n \equiv 5$ である.

このことからすぐに, 次の系が導かれる.

系 1 (倍半変換不可能性) $1 \not\equiv 5$

以上より, 5 の倍数でない a, b については, $a \equiv b$ である. すなわち, 5 の倍数を外しておけば任意の 2 数は互いに倍半変換可能である. しかし, いくつか試してみるとすぐわかるように, 具体的に倍半変換の手順を与えることは a,b の与え方によって難易度が大きく変わる.

今, 次の問題を **倍半変換問題** と呼ぶことにしよう.

問題 1 (倍半変換問題) a, b を 5 の倍数でない自然数とするとき,

(i) a から b に至る倍半変換手順を具体的に求めよ.
(ii) a から b に至る倍半変換手順のうち, 用いる変換回数が最小のものを求めよ.

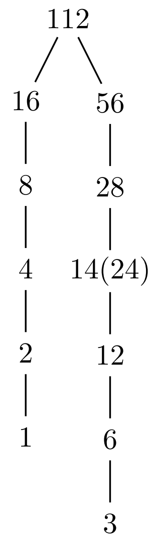

図 2 1 から 3 への倍半変換

問題 1 (i) で求めた手順を倍半変換問題の **解**, (ii) で得られた手順を **最適解** と呼び, 最適解に現れる変換回数を 2 数 a, b 間の **倍半変換距離** (または単に **距離**) と称することにする.

例えば, 図 2 は 1 から 3 に至る解である. これが最適解であることを示すには手間暇がかかる. 最適解を求めるには, 今のところ, シラミ潰しに全数調査を行うしかないからだ. 全数調査を実際に行った結果, 図 2 は最適解であることがわかった.

倍半変換距離はこのようにして算出できるが, 指数関数的に時間がかかる.

定理 2 (倍半変換距離) (5 を除く) 1 ケタの自然数について, 互いの倍半変換距離を求めると表 1 の通りである.

	1	2	3	4	6	7	8	9
1	0	1	11	2	10	9	3	9
2	1	0	10	1	9	8	2	8
3	11	10	0	9	1	4	8	5
4	2	1	9	0	8	7	1	7
6	10	9	1	8	0	3	7	5
7	9	8	4	7	3	0	6	4
8	3	2	8	1	7	6	0	6
9	9	8	5	7	5	4	6	0

表 1　倍半変換距離

3　教材としての倍半変換

前節で考察したように, 倍半変換問題は数学的に興味深い. その意味で深みがある.

さらに, 問題自身に教材としての価値も認められる. 以下に示す根拠から, 自ら探求しようとする生徒の心を揺さぶる可能性がうかがわれるからだ.

1. a, b を 5 の倍数以外から選べばいくらでも新しい問題が作成でき, しかも解の存在が保証されている. (**作問の手軽さ**)
2. a, b の与え方で難易度を調整できる. (**個に応じた出題**)
3. 試行錯誤で解が得られる. (**操作性**)
4. 得られた解について, 別解や最適解を考察させることができる. (**解の吟味**)
5. 4 の考察は, 倍半変換の持つ規則性や性質の探求につながる. (**規則性の発見**)

しかし, 唐突に問題を与えられた生徒が最初から興味を抱くかどうかは, 残念ながら疑問である. 魅力を感じる前にそっぽを向かれる恐れがある. 実際, ある中学生にこの問題を与えてみると,「計算が面倒」や「難しい」といった感想が返ってきた. 「難しい」という見解については, いくらか探りを入れてみた. どうやら, 倍変換と半変換のどちらを選べば目的の数への近道になるのか, 即座に判断できないからのようだ. ひとつの自然数を数字列と見て, 変換する箇所をどこに決めるのか, その上で倍変換・半変換のどちらを選ぶのかという「二重選択」構造にこそ, 面白さを感じて欲しいところだが, その点に「難しさ」を感じてしまっているようだ. いち早く正答を知りたがる世代には受け入れがたいのだろう.

自発的な探求を誘発させるべく, そっぽを向かれる前に動機づけとして, 倍半変換問題のゲーム化を考えたい.

3.1　予備調査

どのようなゲームが好まれるのか傾向を調べるため, 数学科教育法を受講する大学生 11 名に倍半変換問題を提示し, ゲームを自作させた. できあがった各ゲームを学生同士が実行し, どれが面白かったか投票形式で調査した.

提出されたゲームは次の 2 種類に大別できた. すなわち, 同一の場における対戦型ゲームとプレーヤーごとに場の異なる, いわばパズル早解き競争型ゲームである. ゲームの多くは後者であったが, 好評だったものは前者であった. 中でも「戦略」を立てられるものに人気が高く, 偶然が勝敗に大きく関わるものは不人気であった.

岡本昌訓君の作品は, 倍変換の使用を制限した対戦型ゲームであった. すなわち, ゲーム中は原則として "半変換" しか行えず, それが適用できないときにのみ "倍変換" を 2 回まで許すというルールを採用していた. 常に実行可能な倍変換に「パス」のような役割を持たせたわけだ. このアイデアは 3 ページの中学生が感じた「難しさ」の軽減を手助けしそうだ.

以上より, 倍半変換ゲームには次の要素を持たせたい.

1. 同一の場を持つ対戦型ゲームである.
2. ある程度戦略を立てられる.
3. "半変換" を原則とし, "倍変換" に「パス」の役割を持たせる.

3.2　倍半変換ゲーム

さて, 上記の要素を持つように倍半変換ゲームをあらためて創作した. 結果的には, 岡本君の作品に多少の改良を加えたにとどまっている.

対象学年　中学生・高校生

プレーヤーの人数　2 人以上

ルールおよび展開

① 任意の自然数をスタートの数字として決め, 場 (黒板や白紙) に書く.

② 各プレーヤーが場の数字を順次 "半変換" して場に追記していく.

③ ② のとき, 各自 3 回まではいつでも "倍変換" してもよい.

④ ② や ③ を順次繰り返し, 自然数 1 を書いたプレーヤーを勝者とする.

⑤ 場の数字を半変換できず, 倍変換の制限も超過する (手詰まり) プレーヤーを敗者とする.

⑥ 勝者または敗者が決定した時点で 1 ゲームを終了する.

得点　勝者には 3 点, 敗者には 0 点, それ以外のプレーヤーには 1 点を与える.

上記倍半変換ゲームを 3 ページの中学生に与えたところ, 以前よりも興味を持ち, 特にどんな半変換を心がければよいのか戦略に関心を持った様子であった. 倍変換に制限があるのだから, 半変換できない数, 各ケタに奇数が多く現れる数に変換することが基本戦略だろう.

詳細な戦略のためには, 倍半変換の手順を図 3 のような系統図に表し, 本質的にはこれを研究することになる. 図 3 には 5 の倍数を除く 1 から 99 までの数が全て現れる.

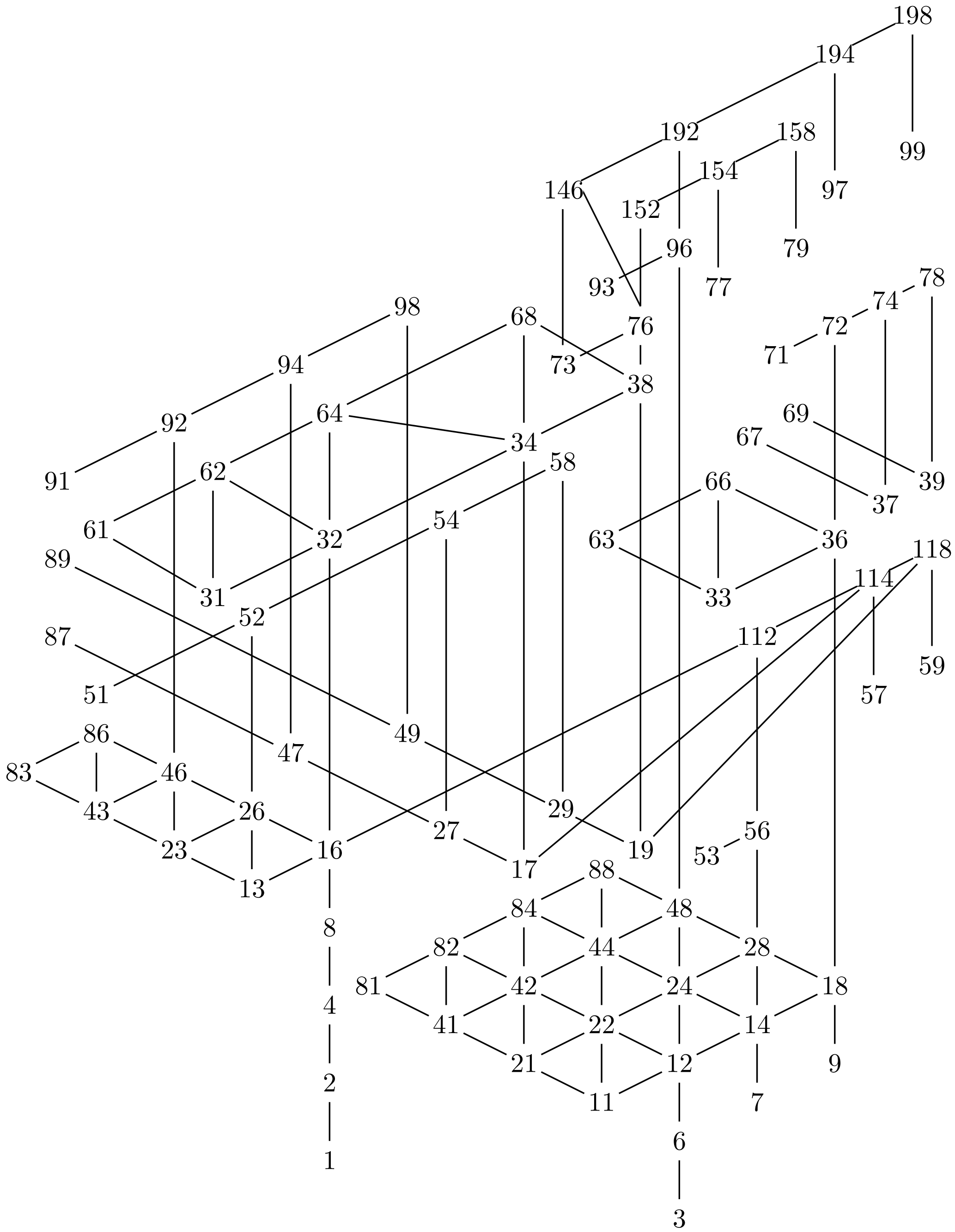

図 3　99 までの倍半変換系統図

このような図があれば 1 に至るルートをある程度読み取ることができるし, 手詰まりになりやすい数もわかる.

また, 半変換のみで 1 に到達可能な数がある一方, 数多く倍変換を要する数も読み取れる. 例えば, 98 は半変換のみで 1 に到達可能であるが, 3 は少なくとも 6 回の倍変換が必要である (図 2 も参照).

教師は予めこのような系統図を用意することで, 教材としてのゲームに何らかの意図を持たせることも可能である.

図 3 は 3 ケタの数がなるべく現れないように作成してあるので, 最短距離が必ずしも表現できていない. 例えば, 図中では 67 と 77 の距離は遠いように見えるが, 実は 67 – 127 – 154 – 77 の 3 ステップで到達可能である.

したがって, この図に最短距離が現れるように, 数を追加したり, 改良したり, あるいは一般化していけば, 倍半変換の規則性や性質の探求につなげられるだろう. 生徒が戦略や必勝法に関心を持ち, 自ら系統図を分析・研究したいという気持ちにさせられれば, 動機づけとしてのゲーム化は役目を果たしたことになる.

3.3 ゲームのアレンジと教材としての与え方

倍半変換ゲームを教材とする際, 考えられるアレンジをいくつか考案した.

- 倍変換の制限回数
  ③ で設定した倍変換の制限回数 “3” には特に意味合いがない. プレーヤーの人数やスタートの数字を決めてから図 3 も参考に教師が調整してもよいだろう.
- ゴールの数字
  ゴールの数字を “1” とする必然性も特にない. 図 3 のような系統図を参考にして変更すれば, 難易度を調節できる.
- 一度使った数字
  一度使った数字は二度と使えないことにすると, 勝敗を早くつけさせられる. ただし, スタートの数字によってはゲームとして成り立たない場合がある. 極端な例をあげると, 12 をスタートの数字にして半変換すると袋小路に陥る.
- NG ナンバー
  特定の数字 n を設定し, n を使ったプレーヤーを敗者とする. 例えば, 34 から 16 へ至るルートを考える. 本来なら 34 – 32 – 16 が最適解である. 今, 32 を NG ナンバーとすると 34 – 17 – 27 – 47 – 94 – 92 – 46 – 26 – 16 のような迂回路を考えなければならない. 別解を考えさせるような発展的ゲームとなろう.

生徒や状況に応じて様々なアレンジを加えられる柔軟性は, 教材として幅広い可能性をうかがわせる.

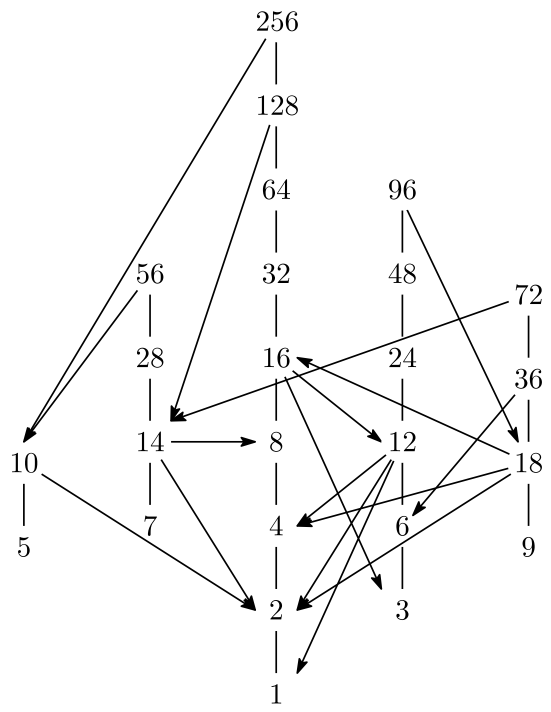

図 4　抽出型倍半変換

4　今後の課題と抽出型倍半変換

倍半変換問題に取り組ませる動機づけを狙ってゲーム化を考えた．倍半変換の性質そのものよりもむしろ, 未知の性質を自ら探求しようとする生徒の態度を育てたい．この教材がその一助となるよう, 今後は授業実践を通して一層の洗練を図りたい.

ところで, 倍半変換において変換部分の桁数が増えてもそのままはめ込む行為は, **位取り法** に反するとの指摘がある．倍半変換の探求が, 通常の計算思考を妨げる結果になっては遺憾である．教材として扱う以上, この点は何とか解消したい．ゲーム化に際して桁数の変化をうまく隠してしまうような工夫を考えたが, 解決には至らなかった. ゲームの対象を中学生・高校生としたのは, 位取り法を熟知した学年との考えによる.

倍半変換の規則を改良することによって, 問題点の回避を以下に試みる．すなわち, 2 倍したり 2 で割った値を元の箇所にはめ込まず, その値をそのまま新しい数としてみよう．例えば, 3141$\underline{592}$6 は 3141$\underline{1184}$6 や 3141$\underline{296}$6 ではなく, そのまま 1184 や 296 に変換される．こうすれば, 数字列から任意に抽出した部分を単に変換するだけなので, 位取り法には反しないだろう．このような倍半変換を **抽出型倍半変換** と呼ぼう.

抽出型では一般に, 変換操作が直接的には可逆にならない．例えば, 1$\underline{6}$ から 12 へは直接変換可能であるが, 12 から 16 へは 1$\underline{2}$ – 4 – 8 – 16 のようにたどらなければなら

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	**5**	2	10	6	9	3	10	9
2	1	0	4	1	9	5	8	2	9	8
3	**3**	3	0	3	11	1	10	4	7	10
4	2	1	3	0	8	4	7	1	8	7
5	3	2	6	3	0	7	10	4	11	1
6	2	2	1	2	10	0	9	3	6	9
7	3	2	4	3	9	5	0	3	5	4
8	3	2	2	1	7	3	6	0	7	6
9	3	2	4	2	8	3	5	3	0	7
10	2	1	5	2	1	6	9	3	10	0

表 2　抽出型倍半変換距離

ない. このことは距離に **向き** を与えることになる. 例えば, 1 から 3 への距離は 5 であるが, 3 から 1 へは距離 3 である.

図 4 を見ると, $1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 4 \equiv 5 \equiv 6 \equiv 7 \equiv 8 \equiv 9 \equiv 10$ は示されている. 任意の数について, 0 以外のひとケタを抜き出して 2 倍するか 2 で割った値は必ず図 4 中に存在する. それらの数値はいずれも 1 に到達可能であるから, 任意の数は 1 に抽出型倍半変換可能である. しかし, その逆は今のところ不明である. そのため, 任意の a, b について $a \equiv b$ であるかどうかは未解決である. 今後の課題としたい.

抽出型倍半変換についても問題 1 と同様な問題やゲームを考えられる. しかし, 可逆性が単純でないためにかなり複雑である. そのためゲームの戦略も立てにくい. 教材として扱うには改善の余地があろう.

可逆でない点が興味を引くように, 抽出型は「占い」にアレンジしてみた.

抽出型倍半変換恋占い

> 自分の誕生日から意中の相手の誕生日へと抽出型倍半変換が可能ならば, 想いが伝わる. (**解の存在**)
> 変換のステップ数が短いほど, 想いを伝えるステップも短い. (**最適解**)
> 逆に, 相手の誕生日から自分の誕生日へも変換可能であれば, 恋愛は成就する. (**可逆性**)

この占いによると, 4 月 8 日生まれ (48) のあなたは, 1 月 4 日生まれ (14) の彼と相思相愛になる可能性がある. しかし, 12 月 8 日生まれ (128) の恋敵から彼への距離は非常に近い. 彼の気持ちが恋敵に向いているとすれば, 彼を奪われる前に彼への告白を急がねばならない.

この教材が有効に機能し, 恋愛と共に学業も成就することを願ってやまない.

参考・引用文献

[1] 屯倭「倍半変換について」 第 65 号 初等教育 2010 年 11 月号.