

第 50 回 近畿数学教育学会 例会
倍半変換問題の実践報告
— 中学生が感じる数学的な美しさ —

平成 23 年 10 月 1 日

平 井 崇 晴
甲 南 大 学

本稿は、倍半変換問題と称する数学パズルを題材とした授業実践の報告である。このパズル教材が生徒の心を揺さぶり、自ら探求しようとする態度を培う授業の一助となることを目指した。

倍半変換問題とは、ある規則に従って自然数の変換を繰り返し、目的の数に到達させる問題である。数学的な魅力だけでなく、規則性や操作性の観点から教材としての価値を認めることができる。

実践では、班別対抗「秘伝書」争奪戦の形を採用した。各班とも自主的に「系統図」を作成するなど、活発な活動が確認できた。課題の提出後は単なる答え合わせにとどまらず、生徒全員で解答を吟味し議論することができた。実践してみて、いくつかの注意点も見つけたが、生徒の感想から察するに、数学的な感動を与えることもできた。このような数学的感動美についても最後に考察する。

1 倍半変換

屯候氏の考案した倍半変換 [1] とは次のようなものである。すなわち、10 進記数法で表された自然数 $\dots A \dots$ のある部分 A について、2 倍するか 2 で割った値を A のところにはめ込む変換である。例えば 31415926 は、その一部 592 を 2 倍して 314111846 に変換できる。あるいは 2 で割れば 31412866 に変換できる。

このような変換を繰り返すと、ある数から他の色々な数へと到達可能である。例えば、2011 から 23 へは図 1 に示す経路が見つかる。

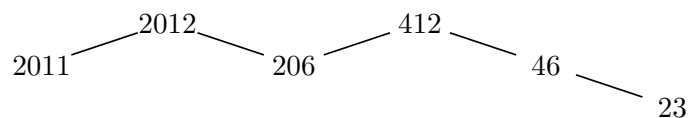


図 1 2011 から 23 への倍半変換

倍半変換について、以下のことがわかっている。

定理 (倍半変換到達可能性)

- (1) 5 の倍数を除く任意の 2 数は互いに到達可能である。^{*1}
- (2) 到達可能な 2 数について、その経路は一意ではない。

この性質は数学的に興味深いだけでなく、教材としての魅力も見いだされる。例えば、2 数の選び方で難易度を調整でき、個に応じた出題が可能である。解の存在が保証されているから、作問が手軽である。試行錯誤による操作性があり、その過程から規則性や性質を探究させられる。また、得られた解について最短経路を考察させることで、解を吟味する態度の育成も期待できる。さらには、自ら探求しようとする生徒の心を揺さぶる教材を目指したい。

以上を踏まえ、中学 3 年生を対象に授業を実践した。

2 倍半変換の授業実践

平成 23 年 3 月 4 日、柏原市立 K 中学校第 3 学年 (男子 12 名 女子 4 名 計 16 名) において倍半変換を題材とした授業実践 (1 時限 50 分) を行った。

倍半変換問題の出題に先立ち、ある数学マジックを披露した。授業はこのマジックのトリックを解説した「秘伝書」の班別対抗争奪戦という形である。解き合った後、提出された解答について全員で吟味した。最後に、その他の変換問題としてコラッツの予想^{*2}という未解決問題があることを紹介して授業を締めくくった。

2.1 班別対抗秘伝書争奪戦

倍半変換手順の説明及び例示の後、定理を紹介し以下のように課題を与えた。

- 班別対抗で倍半変換問題を解きます (各班 4 人)。
- できた班から解答 (経路) を提出して下さい。最も優秀な班に秘伝書を進呈します。
- 提出順よりも経路の短い解答を優先します。従って、提出が遅い班も逆転勝利の可能性があります。
- 練習問題「13 を 1 に倍半変換しなさい。」
- 本題「3 を 1 に倍半変換しなさい。」

^{*1} 5 の倍数は 5 に到達可能、それ以外の数は 1 に到達可能である。1 から 5 へは到達不可能である。

^{*2} 偶数は 2 で割り、奇数は 3 倍して 1 を足すという操作を繰り返すと必ず $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ のループに入るという予想。

2.2 実践の様子

生徒の反応は概ね良好で、誰もが積極的に課題と取り組んでいた。3 から 1 への倍半変換は難し過ぎたらしく、解答を提出できた班は 1 班しかなかった。そのような難問にも関わらず、熱中していた様子は後述の「生徒の感想」からも伺える。

ほとんどの生徒が系統図を自主的に作成していた。かなり大きな系統図を作成した班もあった。図 2 に示す系統図からは、3 と 1 の両方から到達可能な経路を探索した形跡が伺える。このような工夫をこらす生徒も確認できた。

図 3 は提出された解答 (3 から 1 に至る経路) である。解答の提出を締め切った後、この経路について生徒全員で吟味した。そのとき、図中 16 と 112 を結びと、より短い経路 (実は最短経路) が作れることに気づいた生徒がいた。

このように活発な議論も行うことができ、教材が有意義に活用できた。

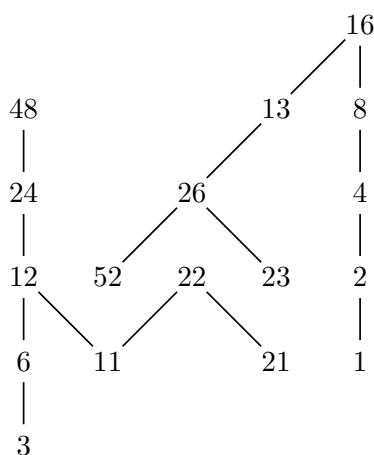


図 2 生徒自作系統図の例

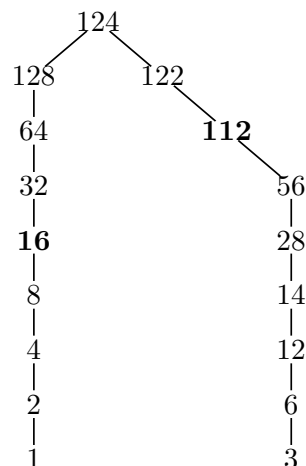


図 3 提出された解答

2.3 実践して気づいたこと及び注意点

今回の実践は、班別対抗秘伝書争奪戦の形で課題を与えた。優秀な解答に秘伝書という報酬を与える観点からは、外発的動機づけを行っている。しかし、生徒各自が嬉々として取り組む姿や「生徒の感想」から、課題の持つ数学的魅力に引き込まれ気づかぬうちに内発的動機づけに変容したように見えた。実践に許された時間数が 1 時限だけだったが、そのような短時間で完結しなければならない環境下、外発的動機づけの即効性が機能したように思える。

各班が問題に取り組んでいる間は、予め大きめの系統図 (8 ページ参照) を手にして適宜机間巡視した。カギになる数字をマークしておくことで、系統図上での生徒の動き

が見えやすくなった。それを参照しながら「いい数字が出ているねえ」とか「近くまで来ているよ」などと告げ、系統図上の現在位置を情報として知らせてあげると、大きな励ましになったようである。

また、指導者自身が倍半変換の操作に慣れている必要はある。机間巡視の際、生徒に変換が合っているか質問されることがあった。系統図を持っているとはいえ、瞬時に変換ミスを見つけられることが授業進行を潤滑にするだろう。

2.4 生徒の感想

授業の最後に全生徒 16 名に感想を書いてもらったところ、以下のように大別できた。

- ① 面白かった・楽しかった (7 件)
- ② 数学の深さを味わった (4 件)
- ③ その他 (5 件)

特に、① の回答中、下記のように難しいが面白い主旨のものが 5 件あった。

「けっこう難しかったけれども、すごく楽しかったです。」

容易に解けて楽しいのではなく、歯ごたえのある点を楽しんでいたように思われる。題意は簡明で解法は難しい、それでいて試行錯誤できると良問になるようだ。

3 注目すべき生徒の反応とまとめ

生徒の感想文中、次の記述が目にとまった。

「数学の基礎から離れてて、基本が分からなくなりそうだったけど、1 に絶対行くのはスゴイと思った。」

「基本が分からなくなりそうだった」とある。倍変換の際、桁数が増えてもそのままはめ込む行為が位取り法に違反し、これが混乱を招いたと思われる。例えば、 31415926 の 592 を倍変換すると桁数が増えるがそのままはめ込んで 314111846 とする。中学 3 年生であれば位取り法に熟知していて支障はなからうという判断の下、実践に至ったのであるが困惑する生徒が存在したのである。

このような場合、まず 1184 を抜き出して記し、その両脇に 3141 と 6 を添えるように追記して 314111846 と変換させるなど提示の際に何らかの配慮が必要である。あるいは倍半変換そのものを改良することも考えられる。^{*3}

^{*3} 第 49 回近畿数学教育学会例会では抽出型倍半変換なるものを発表している。任意の 2 自然数は互いに抽出型倍半変換可能である。証明は濱中裕明氏による。

さて、後半の「1 に絶対行くのはスゴイと思った」にも着目しよう。5 の倍数を除くどんな数も必ず 1 に到達できるという結論に驚き、感動しているようだ。この生徒の感動は、数及びその性質に関わる美に触れたものであり、似たような感想は他にも数件見られた。幾何学的な視覚的感覚とは少し違い、結論のシンプルさに美しさを感じたように思われる。

数学的感動を伝えられた点は大切にしたい。数学教育ではとかく効率よい指導やいかにしてやる気にさせるか、内容の定着に主眼を置く。数学美を感じ取る中学生がいることを考慮すると、内容定着の効率ばかりではなく美しさを伝える教材の研究があってもよいのではないか。

ただし、これを研究対象とすることは決して容易ではない。美とは何かを論ずることは、教師の感性も問われるし、主観的な感覚を議論することになりかねない。また、教師の感性に合わないからといって異なる感性を必ずしも否定できない。多数派の感性より少数派の感性こそ価値があるかも知れない。かなり複雑だ。

しかし、数学者の中には数学的な美に心を奪われ、それ故研究する者も少なくない。ペンローズ^{*4}に至っては、2 通りの仮説が考えられる場合、美しい方を正解だと予測するというのだから、数学美的センスを磨くこともあながち間違いではなさそうだ。

“Mathematical Intelligencer” という雑誌の 1990 年 3 月号に読者数学者を対象に「美しい定理」についてアンケートした結果が掲載され、その第一位は $e^{\pi i} = -1$ だったそうだ。これがなぜ美しいのか。e も π も循環しない無限小数（無理数）であり、i は虚数である。無理数 e の指数が無理数と虚数の積ならば、さぞかし複雑な値になりそうだ。ところが、そういう感覚に反して -1 というシンプルな整数になる。ここに驚きと同時に美を感じるのかも知れない。複雑な倍半変換の道のりを経て 1 に辿りつくとき、似たような感覚があるのだろうか。「数学では単にシンプルであることはそれほど美しくなく、予期しないシンプルさこそが美しい」というペンローズの言葉を思い出す。

倍半変換という操作そのものは、定着させたい技術でも何でも無い。位取り法に反する点から言えば、むしろ慣れさせてはならない操作かも知れない。確かに、生徒が間違えないように技術を伝授すること、真実をわからせることは数学教育の基本姿勢だろう。しかし、それが窮屈になってはならない。数学の本質はその自由性にあり。^{*5} 美しい音楽に触れさせたり美しい絵画を鑑賞させるように、恐れることなく、数学的感動美に触れさせ共感することも大切にしたい。前述の感想を見るに、倍半変換がその一役を担った気さえする。

^{*4} 2 種類の図形で非周期的な平面充填の「ペンローズ・タイル」や不可能立体「ペンローズの三角形」、
「ペンローズの階段」などで有名。

^{*5} カントルの言葉から引用。

参考・引用文献

- [1] 屯候「倍半変換について」第 65 号 初等教育 2010 年 11 月号.
- [2] 平井崇晴「倍半変換ゲーム – 倍半変換の教材化 –」第 49 回 近畿数学教育学会 (口頭発表) 2011 年 2 月 19 日.
- [3] アルブレヒト・ボイテルスパッヒャー「数学はいつも苦手だった」(日本評論社) p.88 – p.90.
- [4] 新井紀子「数学が美しいと感じるイメージ」(ウェブページ)
<http://togetter.com/li/61161>

付録 A 生徒の感想 (全件)

① 面白かった・楽しかった (7件)

- めっちゃ おもしろかったので家で父とやってみたいです。なんか 112 とかすぐに 16 になる数からはじめてみたらおもしろそう。
- こうしたゲームは初めてだったので かなりむずかしかったです。でも面白かったです。
- けっこう難しかったけれども、すごく楽しかったです。
- 今まで経験したことのない授業だったのでとても面白かったです。
- 難しい内容だったがためになった。
- とても難しかったです。とてもつかれました。ありがとうございました。
- 倍半変換ゲームやコラッツの予想がもっとおもしろくなったらいいと思う。今日の授業は楽しかったです。

② 数学の深さを味わった (4件)

- 数学の基礎から離れてて、基本が分からなくなりそうだったけど、1 に絶対行くのはスゴイと思った。数学がぜんぶこんなだったらいいなと思った。
- 倍半変換をしたら必ず 1 になるのがすごく難しかったけど、おもしろかったです。
- 3 を 1 にするのがここまで難しいのか初めて知った。
- もんのすごい熱中できました。数学の深さを改めて知りました。

③ その他 (5件)

- 数学ゲームはひらめきがあるとたのしいですが、私はひらめくことができなかつたので残念です。
- 最後までできなかつたから、最後までやってみたかった。
- 何でも面白いと思えば面白くなるものだと思った。
- とけてよかった。
- 平井先生の授業で数の不思議や楽しさを知ることができました。またこの授業をうけたいです。

誤字等は修正してある。

付録 B 準備した系統図

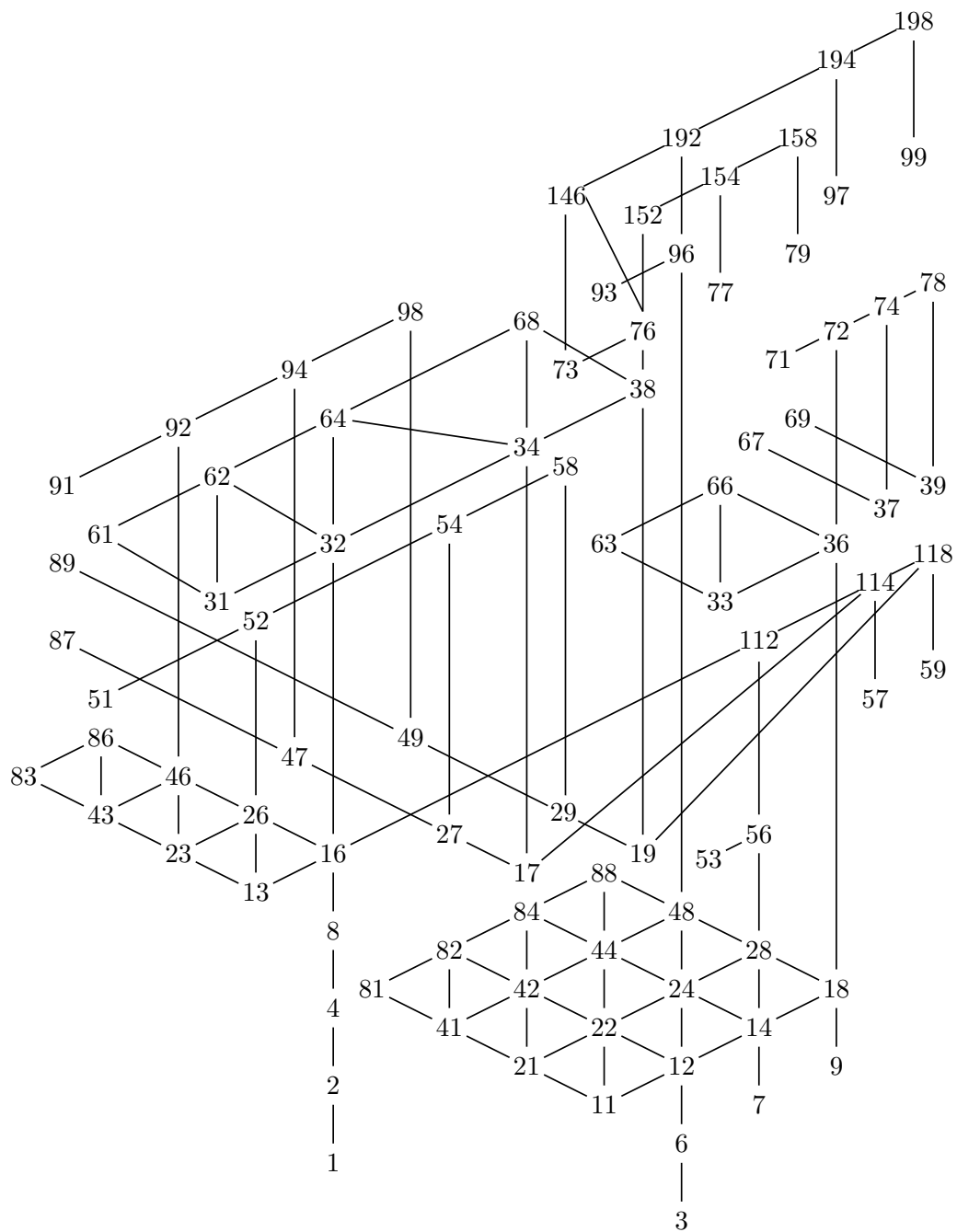


図 4 99 までの倍半変換系統図