レクリエーション数学

2006年度版 テキスト

Dr.Hener　平 井 崇 晴

平成 18 年 4 月 1 日

クラス		学籍番号	
氏　名			

コンピュータ日本学院専門学校

はじめに

レクリエーション数学の世界へようこそ！
　レクリエーション数学とは **遊び心を取り入れた数学** の講義です. 「なんだ, 遊びか」なんて思わないで下さい. 「遊び」というと「不真面目」であったり, 「手を抜いた」ような印象を持つ人が多いようです. 「仕事」や「勉強」とは対称に位置するように考えがちです.
　しかし, 本当にそうでしょうか? 例えばコンピュータゲームで対戦している 2 人の様子を想像して下さい. 今, 彼らはゲームに熱中しています. どんな表情をしていますか? ふざけているでしょうか. 真剣な面もちで, わき目もふらずに取り組んでいる様子が目に浮かびませんか. ゲームに熱中している人は **真剣に遊んでいる** のです. ふざけてやったのでは対戦ゲームなんて面白くないですね. つまり, **「遊び」は「真面目」にやらなくては面白くない** わけです. 決して不真面目ではありません. レクリエーション数学は **「単位」を賭けた知的な遊び** なのです. 真剣でなければ命取りですし, 第一面白くありません.
　ところが, 真剣にゲームをやっていても単調な作業の繰り返しではそれも飽きてしまいます. 色んな作戦を立てたり, 発想を巡らせるところに対戦ゲームの面白さがあります. どうしたら要領よく得点できるかという作戦や問題を柔軟な発想で解くという姿勢は, この知的遊戯を一層面白くする要素なのです. 硬直して「仕事」や「勉強」する姿勢ではなく, いかに工夫し, ヒラメキを活かすかという姿勢を大切にして下さい. 余裕やゆとりという「遊び」がなければヒラメキは訪れないからです. そうすると, 勉強や仕事の成績にも関わりますね. **遊びは仕事をも包括している** のです.
　本書は, ほんの入り口ですが, コンピュータサイエンスの内容を中心に構成しました. コンピュータサイエンスとは, コンピュータを作り, かつ動かすための論理構造を研究する学問です. 更にはコンピュータをより効率的に活用するための方法を探り, その限界をきわめようとする学問領域です. 将来コンピュータと関わる技術者として, こうした知識を身につけて下さい.
　コンピュータサイエンスを含む科学技術の発展はめざましいものがあります. ヒューマノイドの研究も進み, 人に近いロボットが生まれてきています. 鉄腕アトムの誕生も夢ではなさそうです.
　ところで, 鉄腕アトムの主題歌には「**心優しい科学の子**」というフレーズがあります. でもアトムはロボットです. 心はあるのでしょうか. 心とは何でしょうか. 進歩する脳科学がその答えを出したとき, もしかすると心を持ったロボットも実現可能でしょう. 問題は, そこに装備した心が「優しい心」かどうかです. 心優しい科学の子でなければ, それはアトムではないでしょうね.
　そんな話はアトムが生まれる頃に考えればいい, そう考えていませんか? ロボットに装備した心が優しい心かどうか, 結局それは制作者や携わった技術者に依存することでしょう. このような状況はアトムが生まれる前の現在でも同じことです. ロボットや科学技術に「心を込める」ことが大切なのです. 込めた心が優しいか, 豊かであるか, ゆとりがあるか. まずは遊び心を持つことから始めませんか. レクリエーション数学を楽しんで下さい.
　心優しいアトムをいつかあなたの時代に.

Dr.Hener, 平井崇晴

目 次

第1章　2 進数の科学

1.1　2 進 10 進変換

Magic 1 (誕生日当てカード)

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

E

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

D

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

C

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

B

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

A

やり方は簡単！ 原理を探れ !!

(分析) 誕生日当てカードや「？」のカードはどのように作成されているか？

6	**15**	**26**	**31**

問題 1.1 表を利用して次の 2 進数を 10 進数に変換せよ.

(1)

	16	8	4	2	1
	0	0	1	1	0

(2)

	16	8	4	2	1
	0	1	1	1	0

(3)

	16	8	4	2	1
	1	1	0	1	1

(4)

	16	8	4	2	1
	0	1	1	1	1

10 進数	2 進数	16 進数
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10

10 進, 2 進, 16 進数対応表

問題 1.2 表を利用して次の 10 進数を 2 進数に変換せよ.

(1)

	16	8	4	2	1
6					

(2)

	16	8	4	2	1
13					

(3)

	16	8	4	2	1
26					

(4)

	16	8	4	2	1
31					

問題 1.3 次の数を (　) 内に示された進数に変換せよ.

① $1101\ 1101_2$ (16 進数)

② $101\ 1001\ 1010\ 1101_2$ (16 進数)

③ $2DA_{16}$ (2 進数)

④ $AC8F_{16}$ (10 進数)

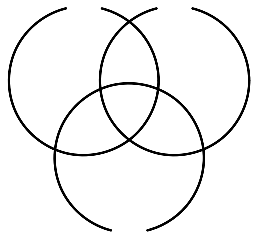
⑤ 239_{10} (16 進数)

1.2　2 進数の威力

コンピュータの色番号はどのように決まっているのか？

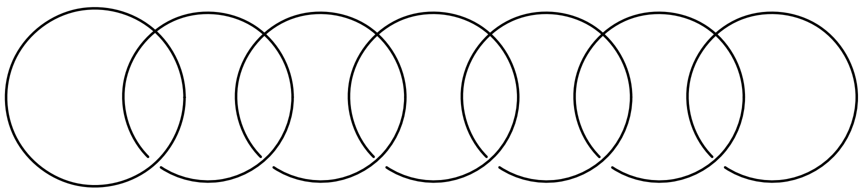
(例) Basic の命令：`CIRCLE(200,150),100,5`

↑
色番号 (水色)



		明暗	G 緑	R 赤	B 青				明暗	G 緑	R 赤	B 青	
0	=	0	0	0	0	→ 黒	8	=	1	0	0	0	→ 灰色
1	=	0	0	0	1	→ 明るい青	9	=	1	0	0	1	→ 少し暗い青
2	=	0	0	1	0	→ 明るい赤	10	=	1	0	1	0	→ 少し暗い赤
3	=	0	0	1	1	→ 明るい紫	11	=	1	0	1	1	→ 少し暗い紫
4	=	0	1	0	0	→ 明るい緑	12	=	1	1	0	0	→ 少し暗い緑
5	=	0	1	0	1	→ 明るい水	13	=	1	1	0	1	→ 少し暗い水
6	=	0	1	1	0	→ 明るい黄	14	=	1	1	1	0	→ 少し暗い黄
7	=	0	1	1	1	→ 白	15	=	1	1	1	1	→ 少し暗い白

問題 1.4 7 つのリングが鎖状につながったブレスレットがある. 1 リング 3000 円の価値がある. この鎖をやりとりしながら 1 泊 3000 円のホテルに 7 日間滞在したい. 鎖は何箇所切ればよいか. 最少回数を答えよ. ただし, 宿泊費は毎日支払わなければならないものとする.

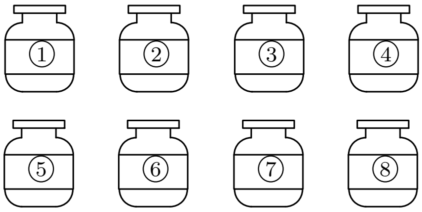


問題 1.5 (天秤の分銅) 1g, 2g, 3g, 4g, ⋯ と 1g 刻みに 15g までの重さを天秤で量りたい. 釣り合った 1 回で g 数を判定するのであるが, 分銅の数をなるべく少なくしたい. 何 g の分銅をいくつ用意すればよいか.

（応用）40g までの重さを量るには何 g の分銅をいくつ用意すればよいか.

問題 1.6 (ニセ１円玉)

(1) 1 円玉がぎっしり詰まったビンが 8 個ある. 本物の 1 円玉は 1 個 1g であるが, どれか 1 つのビンの中には 1 個 2g のニセ 1 円玉ばかりが詰まっている. ビンの中から 1 円玉を何個取り出してもよいが, はかりを 1 度だけ使って, どのビンがニセ 1 円玉のビンであるかを判定して欲しい. どうすればよいか.



(2) 1 円玉がぎっしり詰まったビンが 8 個ある. 本物の 1 円玉は 1 個 1g であるが, 1 個 2g のニセ 1 円玉ばかりが詰まっているビンが今度はいくつあるかわからない. ビンの中から 1 円玉を何個取り出してもよいが, はかりを 1 度だけ使って, どのビンがニセ 1 円玉のビンであるかを判定して欲しい. どうすればよいか.

問題 1.7 (1997 年度 レクリエーション数学前期試験問題 V(2)) 庭木に球形をした 1 年分の肥料を次のように数回に分けて入れるとする.

1 回目は, その年に用意した玉が偶数ならその半分の数の玉を, 奇数なら 1 を足してから半分にした数の玉を入れる.

2 回目は, 残りの玉の個数が偶数ならその半分の数の玉を, 奇数なら 1 を足してから半分にした数の玉を入れる. 3 回目以降も同様にして用意した玉がなくなるまで続ける.

さて, 今年は７回に分けて入れる予定である. 用意した玉は最少でいくつか. また, 最多でいくつか.

1.3　2 進数の驚異

問題 1.8 (指数感覚) レンズ豆は 1 晩で 2 つに増え, 2 晩でそれぞれが 2 つに増えて合計 4 つになる. はじめ 1 個のレンズ豆を植えたところ, 15 日で畑の半分が一杯になった.

畑全部がレンズ豆で一杯になるには, あと何日かかるか？

問題 1.9 (ガマの油売り) ガマの油売りが 20 回半紙を切ったとするとき, それらの紙片を重ね合わせるとどれくらいの「厚さ」になるか (大体のカンで答えよ).

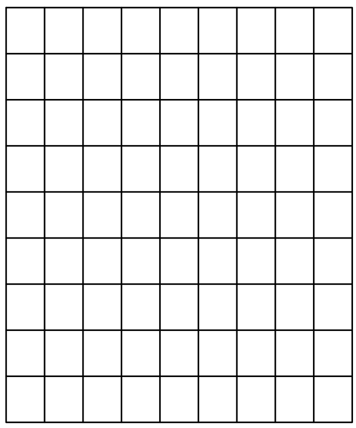
問題 1.10 豊臣秀吉に仕えていた曾呂利新左衛門が, ある日よい仕事をしたので, 秀吉は曾呂利に褒美をとらせることにした.

秀 吉 「曾呂利, でかしたぞ. 何でも褒美を遣わす. 何が欲しい？遠慮のう言うてみぃ.」

はじめは遠慮した曾呂利だが, 秀吉がどうしてもというので,

曾呂利 「それでは将棋盤の 1 マス目に, はじめ 1 粒の米を下さい. 次の日には 2 マス目に 2 粒, 3 日目には 4 粒, というふうに将棋盤の 81 マスが全て埋め尽くされるまで, 毎日前日の 2 倍の米粒を置いていき, それらを全て頂きたく存じます.」

秀 吉 「何じゃ, 欲の無い奴. よかろう, 言うとおりにしてやろう.」



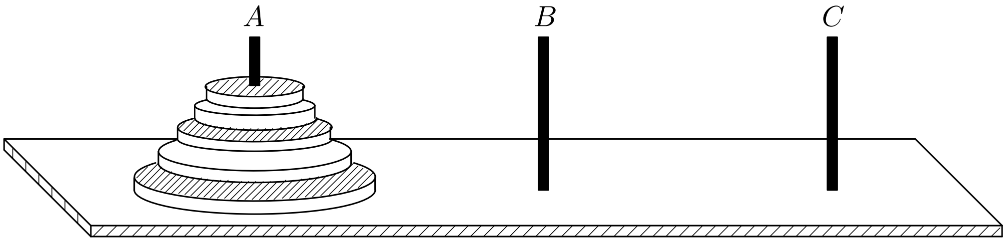
曾呂利新左衛門は最終的にどれだけの米を得ることができたか (何粒? 何升? それとも何石? 大体のカンで答えよ).

問題 1.11 (ハノイの塔) インドにあるバラモン教のある寺院には, 黄金の円盤 64 枚があり, 日夜僧侶が円盤を移しかえている.

そのルールは, 次のようなものである.

① 円盤は, いずれかの柱へ 1 枚ずつ移動することができる.

② 小さい円盤の上に大きな円盤は乗せられない.



この 64 枚がそっくり移されたときがこの世の終わるときだといわれている.

(1) 5 枚の板では最少回数何手で移動できるか?

(2) 6 枚の板では最少回数何手で移動できるか?

(3) ハノイの塔の 64 枚の円盤がそっくり移動されるには, 最少回数何手で移動できるか?
また, そのためにどれくらいの時間がかかると思うか? 次の中から選べ.

ア. 1 時間くらい	**イ.** 1 日くらい	**ウ.** 1 年くらい	**エ.** 10 年くらい
オ. 100 年くらい	**カ.** 1000 年くらい	**キ.** それ以上（	年くらい）

```
/* ハノイの塔解法プログラム */
#include<stdio.h>
void hanoi(int k, char x, char y, char z);
int  cnt = 0;                                /* 手数カウント */
void main(void)
{
    int n;
    printf("円盤の枚数 ? ");
    scanf("%d",&n);
    hanoi(n, 'A', 'B', 'C');
}
void hanoi(int k, char x, char y, char z)  /* 再帰手続き */
{
    if(k > 0){
        hanoi(k - 1, x, z, y);
        printf("%5d: 円盤 %d を %c から %c へ移動¥n", ++cnt, k, x, y);
        hanoi(k - 1, z, y, x);
    }
}
```

1.4 パリティ

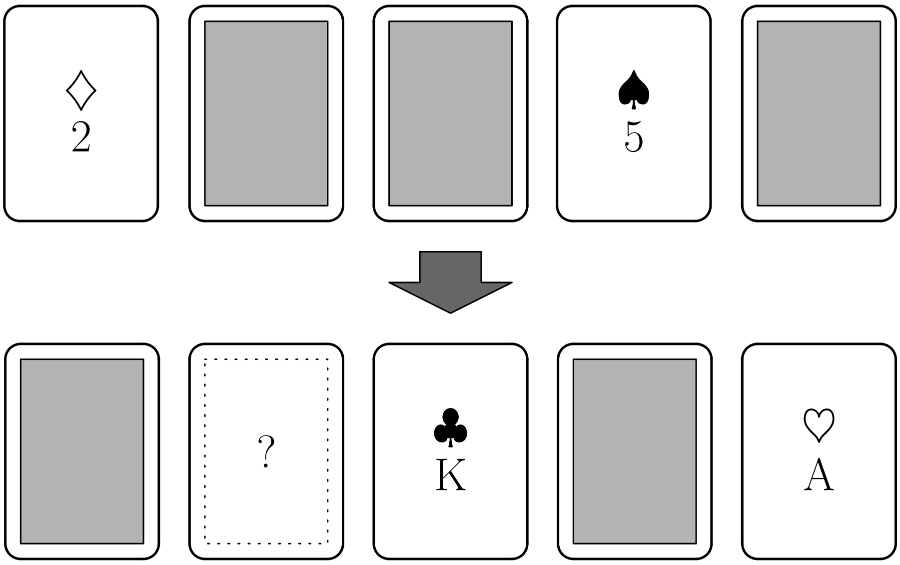
Magic 2 (表向き, 裏向き)

① 相手に好きな枚数のカードを渡し, テーブル上に裏表好きなように入れ混ぜて並べてもらう.

② 術者は後ろ向きになり, 相手に 2 枚ずつ 同時に好きな回数だけひっくり返してもらう.

③ どれでも好きなカード 1 枚を手で隠してもらう.

④ 術者は向き直り, 隠したカードが表向きか裏向きかを言い当てる.



Magic 3 (意のままに動く)

① 好きな場所に置いてもらう.

② 「置いた場所の数字の数だけ移動して下さい.」

③ 「7 と 9 の場所は消して下さい.」

④ 「4 つ移動して下さい.」

⑤ 「3 の場所は消して下さい.」

⑥ 「ひとつ隣に移動して下さい.」

⑦ 「6 と 8 の場所は消して下さい.」

⑧ 「8 つ移動して下さい.」

⑨ 「4 の場所は消して下さい.」

⑩ 「今いる場所の数だけ移動して下さい.」

⑪ 「最後に 1 と 5 は消しましょう.」

⑫ 必ず 2 の場所に来ている.

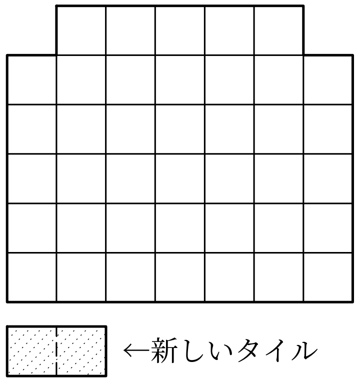
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Magic 4 (紙コップパニック)　術者の動きをよく観察して下さい. 上向き下向きを混ぜて並べた紙コップがあります. これらのうち, 勝手な二つの紙コップを持って, それぞれ同時にひっくり返します. 上を向いているコップは伏せ, 下を向いているコップは上を向かせるのです. このような操作を 3 回繰り返して, 紙コップを全て下向き (伏せた状態) にして下さい.

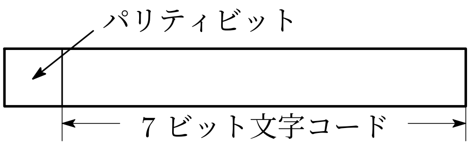
問題 1.12 (タイル張りのテラス) 家のテラスには図のように 40 個の正方形のタイルが張ってあります。だいぶひびが入ってきたので, 全て新しいタイルに張り替えようということになりました.

ところが新しいタイルは長方形で, 長方形タイル 1 個で, 古いタイル 2 個分を張ることになります. 従って新しいタイル 20 個でこのテラスを張り替えることになります.

どのように張り合わせればよいでしょうか.



問題 1.13 (パリティビット) 7 ビットの文字コードに, 図のように 1 ビットのパリティビットを付加して 8 ビットとする. パリティビットを 0 または 1 にすることによって, 8 ビット中の 1 の個数が偶数になるようにする (偶数パリティ).



問 1 16 進数表示をしたとき, 次のようになる文字コードにパリティビットを付加すると, 16 進数表示はそれぞれどのようになるか.

① `00`

② `3F`

③ `7F`

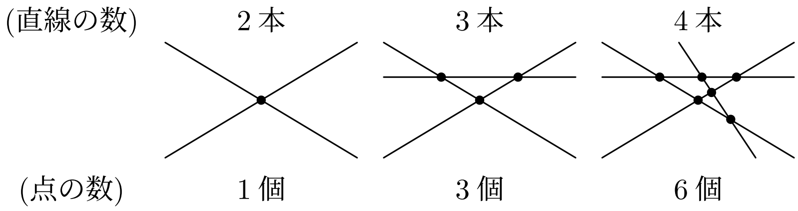
問 2 次の既にパリティビットが付加されたコードのうち, 1 ビットのデータ誤りが発生しているのはどれか.

ア. `0F`　イ. `80`　ウ. `8F`

第2章　計算理論の問題

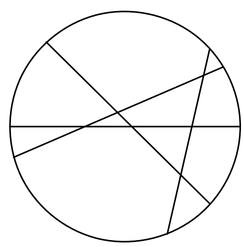
2.1　数え上げ問題

問題 2.1 (交点数問題) 下の図のように何本かの直線をひき, その直線の数とそれらの交わる点の数について考える. 直線は他の全ての直線と交わり, 交わった点には 3 本以上の直線は通らないものとする. このように直線を 10 本ひくと, 交わる点はいくつか.

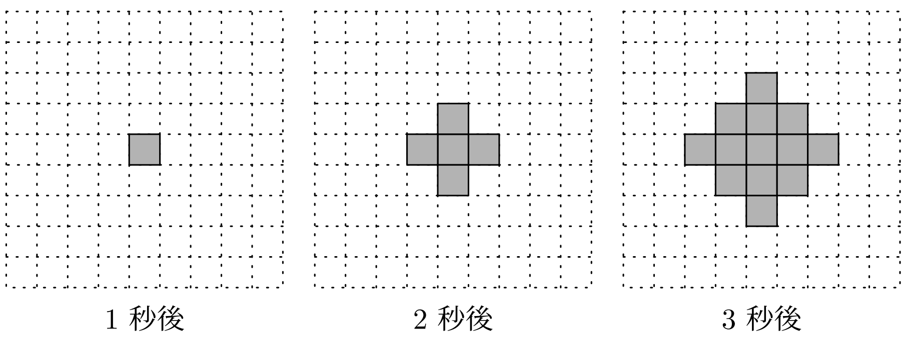


問題 2.2 (断片数問題) 円を何本かの直線で分割し, 分割された断片の数を数える. 例えば, 直線が 4 本のときは, 図のように最高 11 個の断片に分割される.

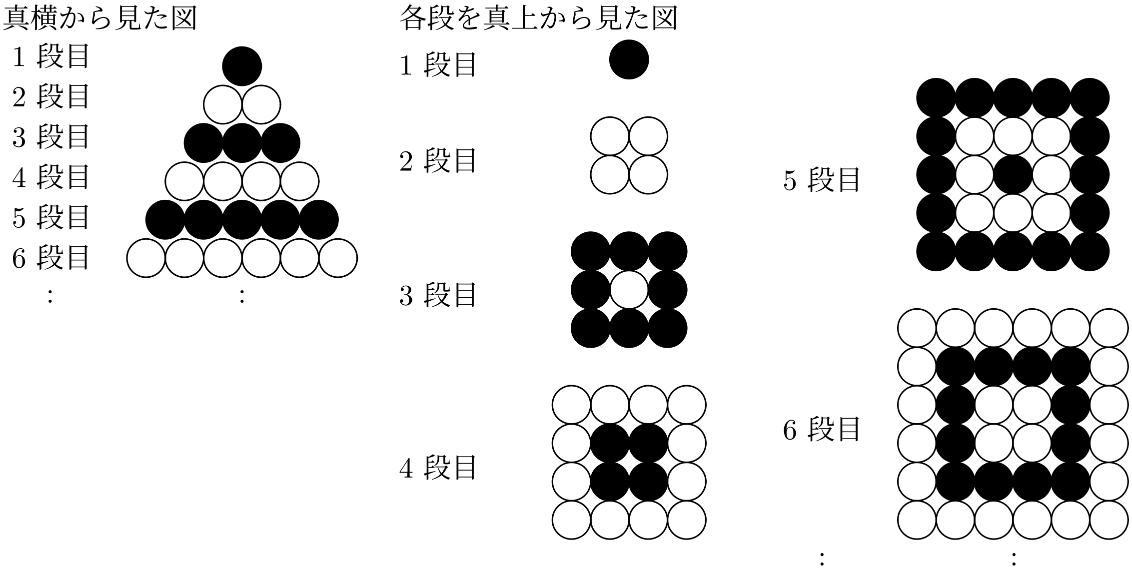
では, 10 本の直線によれば, 最高何個の断片に分割されるか.



問題 2.3 (点灯数問題) 次の図のような規則でマス目に次々に電気が点いていく装置がある. このとき 10 秒後には何個のマス目に電気が点いているか答えよ.



問題 2.4 (黒玉白玉個数問題) 同じ大きさの黒い玉と白い玉が下の図のように積み重ねてある. 11 段目の黒玉白玉はそれぞれ何個あるか.



問題 2.5 (ホテルの部屋番号) あるホテルの部屋は 4 と 9 の数字は使わずに 1 号室, 2 号室, 3 号室, 5 号室, ⋯⋯ と順に部屋に番号をつけてある. 500 番目の部屋は何号室になるか.

(参考) `http://www.cong.ac.jp/~hener/lecture/C1/loops/looptop.html`
ユーザ名 cong　パスワード ______________

数え上げ問題のコツ

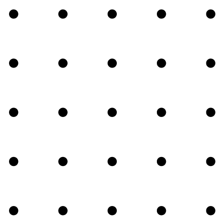
1. 規則性の発見. ⟵ $\boxed{}$
2. かけ算形にする. ⟵ $\boxed{}$
3. $\boxed{}$ をつける.
   (考察) 山にはえている木の本数を数えたい. 貴方ならどうするか?

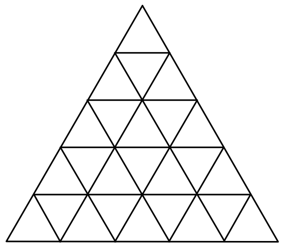
基本姿勢：$\boxed{}$

問題 2.6 (数え上げ問題のコツ 2, 3 ; 基本例題)

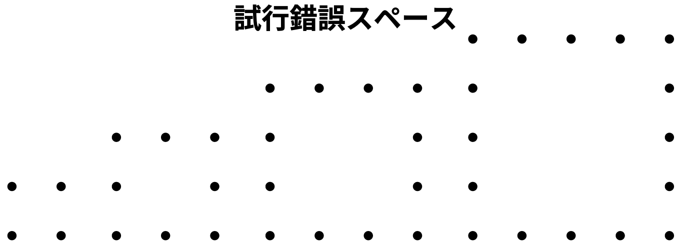
(1) 左下図のように, 等間隔に並んだ 25 個の点がある．この中から 4 点を選んでそれらを頂点とする正方形を作る．このとき, そのような正方形の作り方は全部で何通りあるか.

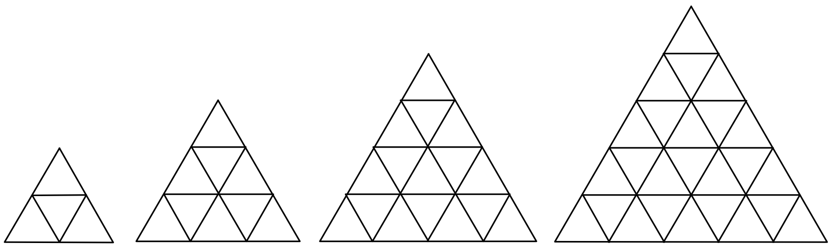
(2) 右下図は, 正三角形を組み合わせたものである．この中に, 平行四辺形は（大小様々のものを取り混ぜて）全部で何個あるか.





試行錯誤スペース

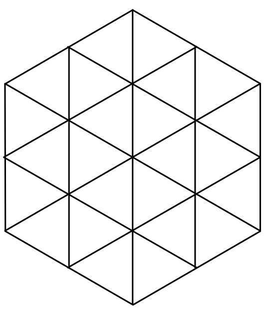


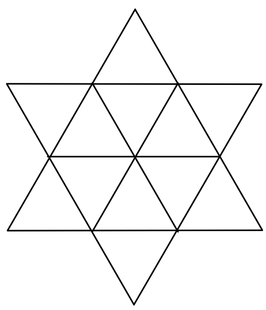


問題 2.7 (数え上げ問題のコツ 2, 3 ; 実践問題)

(1) 左下図は, 正三角形を組み合わせたものである．この中に, ひし形は (大小様々のものを取り混ぜて) 全部で何個あるか.

(2) 右下図は, 正三角形を組み合わせたものである．この中に, 平行四辺形は (大小様々のものを取り混ぜて) 全部で何個あるか.





問題 2.8 (発展: 無限を数える) 数の個数について, 次の問に答えよ.

問 1 偶数と自然数はどちらが多いか.

問 2 自然数と整数はどちらが多いか.

問 3 自然数と分数（有理数）はどちらが多いか.

2.2 スケジューリング問題

2.2.1 川渡り問題

問題 2.9 (狼・山羊・野菜運搬問題) 狼と山羊を連れ, 野菜が入ったカゴを背負った男が, イカダで川を渡ろうとしている. イカダは小さいので, 男の他に一つの荷物しか乗せることができない. 当然, 男にしかイカダを漕ぐことはできない.

また, 男がいないと, 山羊は野菜を食べてしまい, 狼は山羊を食べてしまう.

野菜も山羊も食べられることなく, 全てのものが川を渡りきるためには, どのような手順でイカダを渡せばよいか.

問題 2.10 (アブナイ家族の川渡り問題) 父, 母, 長男, 次男, 長女, 次女, お手伝い, 犬が川を渡る. ボートを漕げるのは, 父, 母, お手伝いの 3 人だけで, ボートは漕ぎ手の他一人 (または 1 匹) だけを乗せられる.

ところが, 母がいないと父が娘に大変イケナイ行いを, 父がいないと息子が母にしてはイケナイ行いをしてしまう. また, お手伝いがいないと犬がとてもここでは言えないような行いを他の家族全員にしてしまう.

全員が無事に川を渡るには, どのような手順でボートを渡せばよいか.

問題 2.11 (川渡りボート最短時間問題) 川のこちら岸に 4 隻のボート A, B, C, D がある．4 隻全てのボートを向こう岸に運びたい．川を渡るのにそれぞれのボートは次の所要時間が必要である．

A	B	C	D
1 分	3 分	4 分	7 分

2 隻を同時に運ぶこともできるが，この場合は**遅いボートと同じ時間** がかかる．全てのボートを運ぶのに必要な最短時間を求めよ．

→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
合計時間	分

問題 2.12 問題 2.11 において，ボートの隻数とそれぞれの所要時間を次のように変更した場合はどうか．

(1) A: 1 分, B: 2 分, C: 4 分, D: 8 分　(4 隻)

(2) A: 2 分, B: 6 分, C: 9 分, D: 10 分, E: 11 分, F: 12 分　(6 隻)

(3) A: 2 分, B: 6 分, C: 7 分, D: 9 分, E: 10 分, F: 11 分, G: 12 分　(7 隻)

試行錯誤スペース

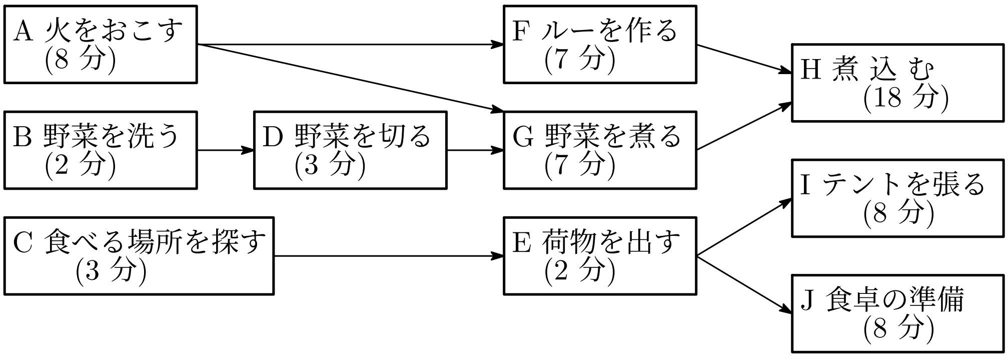
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
合計時間	分

→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
合計時間	分

→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
←	分
→	分
合計時間	分

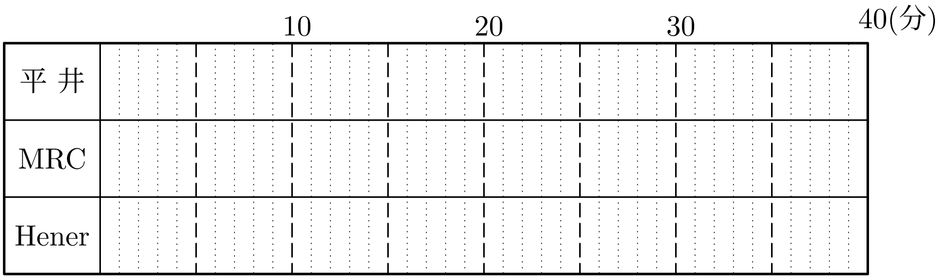
2.2.2 Day Camp のカレー

問題 2.13 (カレー調理スケージューリング問題) Day Camp でカレーライスを作ることになった. そのためには以下の 10 個の仕事を決められた順（矢印）に行わなければならない.

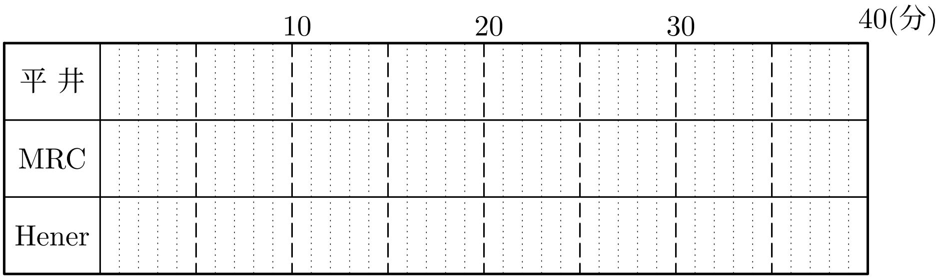


(1) 平井, MRC, Hener の 3 人が仕事を分担してできるだけ短い時間で作業を済ませるにはどのように分担すればよいか.

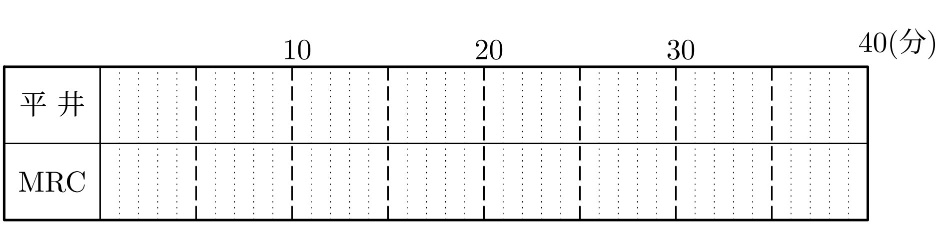
(a) 手が空いた人はすぐに次の作業に取りかかるものとする.



(b) もっと早く作業を済ませる方法はないか.



(2) 平井, MRC の 2 人が仕事を分担してできるだけ短い時間で作業を済ませるにはどのように分担すればよいか.



要領よくやる秘訣? (常識)

1. 大勢でやる方が早い?
2. 個々の作業に要する時間が短いほど早い?
3. 手が空いたらすぐに次の作業にかかると早い?

問題 2.14 (ビフテキ最短時間問題) ビフテキを焼くのにグリルが小さいため, 1 度に 2 枚しか焼くことができない. ビフテキを片面焼くのに 10 分かかる. どうすれば 3 枚のビフテキを最短時間で焼くことができるか.

問題 2.15 (ジョーンズ夫妻家事割り振り問題) ジョーンズ夫妻は次の 3 種類の家事をやらなければなりません.

① 階下の床に掃除機をかけること. 掃除機は 1 台しかなく, 30 分かかる.

② 芝生を刈ること. 芝刈り機はやはり 1 台だけ. これも 30 分かかる.

③ 赤ん坊にミルクを与えて寝かしつけること. これにも 30 分.

二人で協力してこれらの仕事を片づけるとして, どうやったら最も短い時間で済ませることができるか.

2.2.3 その他のスケジューリング問題

問題 2.16 (通話最少回問題) ある商社は世界 7 都市に支社がある. 7 つの支社では, どれも異なる情報を持っているが, それらの情報を, どの支社も知っていなければならないため, 電話によって情報交換を行う.

全ての支社が互いの情報を共有するための通話回数を, 最も少なくするように通話の順番を決定せよ. また, そのときの通話回数は何回か. ただし, A 支店と B 支店が通話をするとき, A, B は彼らがそれまでに知るすべての情報を伝えあうものとする.

2.3 人間 vs コンピュータ

コンピュータの限界と共存

Fermat の最終定理 どんな整数 x, y, z に対しても次の等式は成り立たない?

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \geqq 3)$$

問題 2.17 (Euler の予想) どんな自然数 x, y, z, t に対しても次の等式は成り立たない？

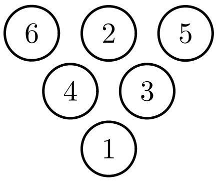
$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

問題 2.18 (ビリヤードパズル)

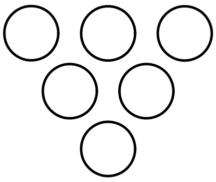
(1) 下の例のように, 上 2 つの数の差が下の数になるという条件を常に満たすように, 1 〜 6 の自然数を右の○中に 1 度ずつ入れる.

この例以外の解（左右対称なものを除く）を求めよ.

例



(1)

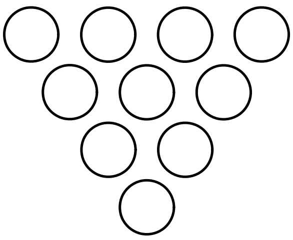


(2) (1) と同様なことを 1 〜 10 の自然数について行え.

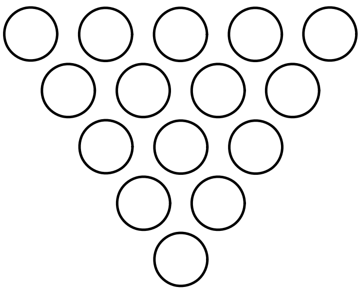
(3) (1) と同様なことを 1 〜 15 の自然数について行え.

(4) (1) と同様なことを 1 〜 21 の自然数について行え.

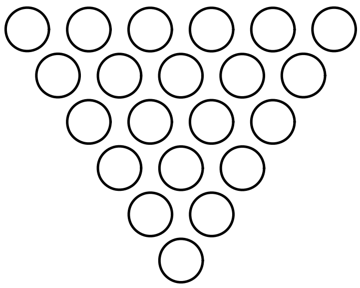
(2)



(3)



(4)



問題 2.19 (巴戦) 巴戦は公平でしょうか?

3 人の力士 A, B, C による巴戦のルールは次の通りである．まず, C が控えにまわり, A と B が対戦する．この勝者が控え力士 C と対戦し, 敗者は控えにまわる．さらに, 次の対戦の勝者が控え力士と対戦し, 敗者は控えにまわる．このような対戦を繰り返し 2 連勝した力士を優勝とする (2 連勝する力士が現れるまで無限に続く).

資料：過去の巴戦による優勝決定戦 (◎が優勝; $\boxed{}$ は控え力士からの優勝)

場所	成 績		勝ち力士		決まり手	負け力士	
1956 年春	12 勝 3 敗		若ノ花	(大関)	上手出し投げ	若羽黒	(前 15)
			朝　汐	(関脇)	寄 り 倒 し	若ノ花	
		◎	$\boxed{\text{朝　汐}}$		寄 り 切 り	若羽黒	
1961 年秋	12 勝 3 敗		柏　戸	(大関)	寄 り 切 り	明武谷	(前 4)
			大　鵬	(大関)	寄 り 切 り	柏　戸	
		◎	$\boxed{\text{大　鵬}}$		寄 り 倒 し	明武谷	
1965 年秋	12 勝 3 敗		柏　戸	(横綱)	寄 り 切 り	明武谷	(前 5)
		◎	柏　戸		寄 り 切 り	佐田の山	(横綱)
1990 年春	13 勝 2 敗		小　錦	(大関)	寄 り 切 り	北勝海	(横綱)
			霧　島	(関脇)	寄 り 切 り	小　錦	
			北勝海		押 し 出 し	霧　島	
		◎	北勝海		下 手 投 げ	小　錦	
1993 年名	13 勝 2 敗		曙	(横綱)	押 し 倒 し	若ノ花	(関脇)
		◎	曙		寄 り 倒 し	貴ノ花	(大関)
1994 年春	12 勝 3 敗		貴ノ浪	(大関)	はたき込み	貴闘力	(前 12)
			曙	(横綱)	突 き 倒 し	貴ノ浪	
		◎	$\boxed{\text{曙}}$		押 し 倒 し	貴闘力	
1996 年九	11 勝 4 敗		武蔵丸	(大関)	寄 り 切 り	曙	(横綱)
		◎	武蔵丸		寄 り 切 り	貴ノ浪	(大関)

※ 1996 年九は 5 人による優勝決定戦

(参考)	前哨戦結果	○	武蔵丸	(大関)	寄 り 倒 し	若乃花	(大関)	×
		○	貴ノ浪	(大関)	すくい投げ	魁 皇	(関脇)	×

問題 2.20 (Collatz の問題) 勝手な自然数からスタートして, 偶数なら 2 で割り奇数なら 3 倍して 1 を足すという操作を繰り返す．すると必ず

$$4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \cdots\cdots$$

のループに入るようである．反例はないのだろうか？

2.4 駅伝メンバー決定問題

問題 2.21 (駅伝メンバー決定問題) 表 2.1 は, 駅伝部員 10 人が 1.5km と 4.0km を各 5 回ずつ試走した記録である. このデータを参考に, 駅伝メンバーと走る区間を決定せよ. ただし, 駅伝は 5 区間からなり, 各区間距離は以下に示す通りである.

区間	1 区	2 区	3 区	4 区	5 区
距離	3.0km	1.0km	5.0km	1.5km	4.0km

駅伝の区間距離

表 2.1: 駅伝部員 10 人の試走タイム

部員	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
A	4 分 55 秒	5 分 10 秒	4 分 57 秒	5 分 04 秒	5 分 09 秒
B	5 分 15 秒	5 分 10 秒	5 分 05 秒	5 分 05 秒	5 分 02 秒
C	4 分 58 秒	5 分 01 秒	5 分 05 秒	5 分 03 秒	5 分 05 秒
D	4 分 44 秒	5 分 07 秒	5 分 06 秒	4 分 46 秒	5 分 04 秒
E	5 分 16 秒	5 分 23 秒	5 分 22 秒	5 分 25 秒	5 分 20 秒
F	4 分 40 秒	5 分 00 秒	4 分 52 秒	4 分 55 秒	4 分 59 秒
G	5 分 01 秒	5 分 14 秒	5 分 15 秒	5 分 21 秒	5 分 26 秒
H	4 分 54 秒	5 分 06 秒	5 分 02 秒	5 分 07 秒	5 分 09 秒
I	5 分 09 秒	5 分 03 秒	5 分 15 秒	5 分 31 秒	5 分 12 秒
J	5 分 22 秒	5 分 21 秒	5 分 17 秒	5 分 20 秒	5 分 19 秒

1.5 km の試走タイム

部員	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
A	13 分 07 秒	13 分 14 秒	13 分 31 秒	13 分 38 秒	13 分 39 秒
B	14 分 32 秒	14 分 14 秒	14 分 06 秒	13 分 59 秒	13 分 51 秒
C	13 分 37 秒	13 分 30 秒	13 分 41 秒	13 分 40 秒	13 分 36 秒
D	14 分 04 秒	13 分 31 秒	14 分 28 秒	13 分 48 秒	13 分 43 秒
E	13 分 43 秒	13 分 56 秒	13 分 44 秒	13 分 38 秒	13 分 48 秒
F	14 分 20 秒	15 分 12 秒	14 分 18 秒	13 分 52 秒	13 分 42 秒
G	16 分 26 秒	16 分 03 秒	15 分 39 秒	15 分 05 秒	14 分 55 秒
H	14 分 41 秒	15 分 06 秒	14 分 37 秒	13 分 41 秒	13 分 47 秒
I	15 分 38 秒	13 分 35 秒	15 分 41 秒	14 分 51 秒	14 分 06 秒
J	13 分 39 秒	13 分 37 秒	13 分 42 秒	13 分 41 秒	13 分 45 秒

4.0 km の試走タイム

区間	1 区	2 区	3 区	4 区	5 区
距離	3.0km	1.0km	5.0km	1.5km	4.0km
走者					

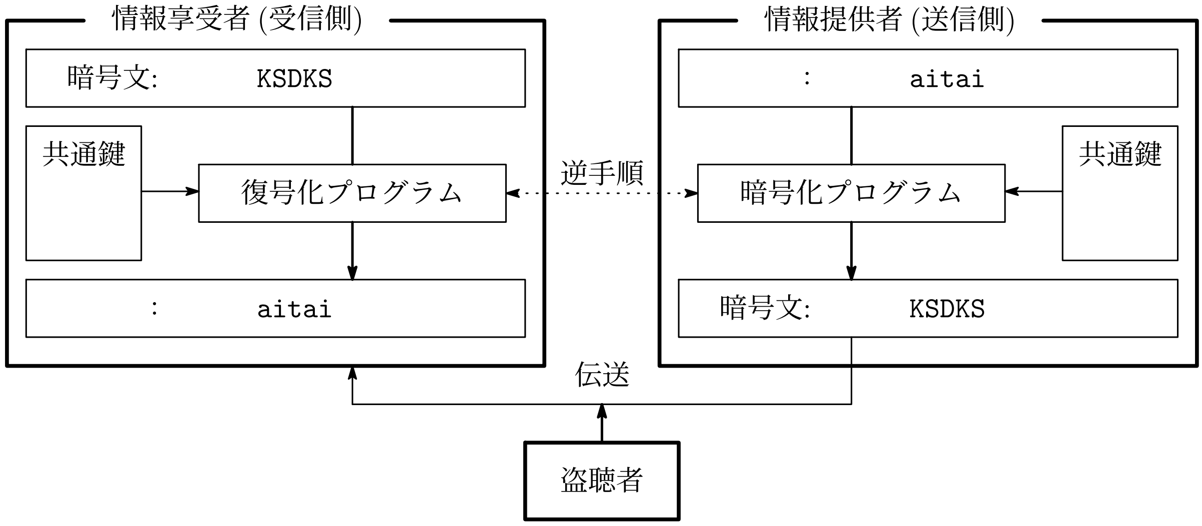
決定メンバー表

第3章　暗号と通信

3.1　共通鍵暗号 (慣用暗号系)

当面の間, 扱われている文字はアルファベット 26 文字だけに限定する. 平文は小文字, 暗号文は大文字で表すことにする.

[共通鍵暗号体系]



共通鍵暗号体系の特徴

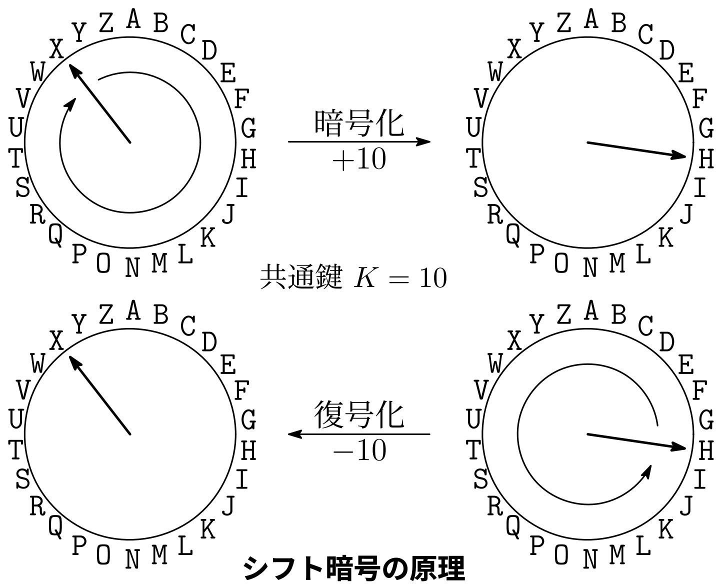
- 暗号化の鍵　　復号化の鍵
  安全な経路を経由して通信相手に　　　　必要がある.
- 暗号化の手順と復号化の手順は逆手順
  暗号化の手順から復号化の手順が　　　　されてしまう.

3.1.1　シフト暗号

問題 3.1 (シフト暗号) シフト暗号において, 共通鍵 $K = 9$ とする.

(1) 次の平文を暗号化せよ.
`computer`

(2) 次の暗号文を復号化せよ.
`WRQXW`



シフト暗号の原理

問題 3.2 (シフト暗号解読) シフト暗号において, 次の暗号文を解読し鍵を特定せよ.

`JDNXLQ`

3.1.2　換字暗号

シフト暗号では全て一律にずらした. 換字暗号では, 次のようなランダムな対応表 3.1 を用いる.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
X	N	Y	A	H	P	O	G	Z	Q	W	B	T
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
S	F	L	R	C	V	M	U	E	K	J	D	I

対応表 3.1

問題 3.3 (換字暗号) 換字暗号において, 対応表 3.1 を用いる.

(1) 次の平文を暗号化せよ.
`hener`

(2) 次の暗号文を復号化せよ.
`AXZVUWZ`

3.1.3　線形暗号

(準備: 行列)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

線形暗号の原理

対応表 3.2, 鍵 $= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

対応表 3.2

(暗号化) x $= 24$ を暗号化する.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times \_\_ + 4 \times \_\_ \\ 0 \times \_\_ + 2 \times \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 8 \end{pmatrix}$$

暗号文は $(26, 8)$.

(復号化) $(26, 8)$ を復号化する.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 2 - 4 \cdot 0} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \times \_\_ + -4 \times \_\_ \\ 0 \times \_\_ + 5 \times \_\_ \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

対応表 3.2 より, 平文は x.

問題 3.4 (線形暗号) 線形暗号において, 対応表 3.2 を用い, 鍵 $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 平文 love を暗号化せよ.

(2) 暗号文 (11, 12), (8, 11), (7, 4) を復号化せよ.

3.2 暗号解読

3.2.1 換字暗号への攻撃

文字	確率	文字	確率	文字	確率	文字	確率
a	.082	h	.061	o	.075	v	.010
b	.015	i	.070	p	.019	w	.023
c	.028	j	.002	q	.001	x	.001
d	.043	k	.008	r	.060	y	.020
e	.127	l	.040	s	.063	z	.001
f	.022	m	.024	t	.091		
g	.020	n	.067	u	.028		

表 3.3 26 文字の出現確率 (Beker, Piper)

- 出現確率の分類
  (1) `e` : 0.127 の確率.
  (2) `t a o i n s h r` : 0.060 – 0.091 の確率.
  (3) `d l` : 0.040 程度の確率.
  (4) `c u m w f g y p b` : 0.015 – 0.028 の確率.
  (5) `v k j x q z` : 0.010 以下の確率.
- 2 続き文字の頻度ベスト 30
  `th he in er an re ed on es st en at to nt ha`
  `nd ou ea ng as or ti is et it ar te se hi of`.
- 3 続き文字の頻度ベスト 12
  `the ing and her ere ent tha nth was eth for dth`.

暗号解読例

```
YIFQFMZRWQFYVECFMDZPCVMRZWNMDZVEJBTXCDDUMJ
NDIFEFMDZCDMQZKCEYFCJMYRNCWJCSZREXCHZUNMXZ
NZUCDRJXYYSMRTMEYIFZWDYVZVYFZUMRZCRWNZDZJJ
XZWGCHSMRNMDHNCMFQCHZJMXJZWIEJYUCFWDJNZDIR
```

文字	頻度	文字	頻度	文字	頻度	文字	頻度
A	0	H	4	O	0	V	5
B	1	I	5	P	1	W	8
C	15	J	11	Q	4	X	6
D	13	K	1	R	10	Y	10
E	7	L	0	S	3	Z	20
F	11	M	16	T	2		
G	1	N	9	U	5		

表 3.4 暗号文の 26 文字の出現頻度分析

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

表 3.5 対応表の復元

Step 1 最頻出現文字 = Z ⟵ e ?

Step 2 高頻度の文字の推測

$$\texttt{C} \longleftarrow \texttt{t},\quad \texttt{D} \longleftarrow \texttt{a},\quad \texttt{F} \longleftarrow \texttt{o},\quad \texttt{J} \longleftarrow \texttt{i},$$
$$\texttt{M} \longleftarrow \texttt{n},\quad \texttt{R} \longleftarrow \texttt{s},\quad \texttt{Y} \longleftarrow \texttt{h},\quad \texttt{N} \longleftarrow \texttt{r}.$$

Step 3 最頻出現文字と続き文字の分析

- DZ, ZW (4 回), WZ は現れていない, W より多く現れている文字はたくさんある.
- NZ, ZU (3 回).
- RZ, HZ, XZ, FZ, ZR, ZV, ZC, ZD, ZJ (2 回).
- 最初の方に ZRW と RZW, 後ろの方に RW, R は頻出.

$$\mathtt{W} \longleftarrow \mathtt{d}, \quad \mathtt{R} \longleftarrow \mathtt{n}$$

```
------   --------- ----   --- ------------
YIFQFMZRWQFYVECFMDZPCVMRZWNMDZVEJBTXCDDUMJ
-------- ---- --------- -- ---  ---- ----
NDIFEFMDZCDMQZKCEYFCJMYRNCWJCSZREXCHZUNMXZ
- --- ------ ------  --- --- --  -  - - --
NZUCDRJXYYSMRTMEYIFZWDYVZVYFZUMRZCRWNZDZJJ
-  ----- ----------- ----  ------- --- --
XZWGCHSMRNMDHNCMFQCHZJMXJZWIEJYUCFWDJNZDIR
```

- 以下, このような操作を続けていく.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	y	a	s	p	r	b	c	u	t	v		i
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
h		x	f	n	k	g	w	m	d	l	o	e

表 3.6 対応表の復元 (完成版)

(全文) Our friend from Paris examined his empty glass with surprise, as if evaporation had taken place while he wasn't looking. I poured some more wine and he settled back in his chair, face tilted up towards the sun.

パリから来た我々の友人は, 見ていなかった間にまるで蒸発してしまったかのように空になったグラスを驚いて調べた. 私はもう少しワインを注ぎ, 彼は太陽の方へ顔を傾け, 椅子に背もたれた.

3.2.2 線形暗号への攻撃

問題 3.5 (線形暗号解読) 線形暗号において, 対応表 3.2 が用いられていることがわかっているものとする. 2 組の平文と暗号文を, 次のように入手したとせよ.

平文		暗号文
K	→	$(3, 8)$
O	→	$(7, 20)$

このことから, この線形暗号で用いられている鍵を特定せよ.

3.3 理論的に解読不可能な暗号

- **情報理論的安全性** 無限の計算資源を使っても破れない.
- **計算量的安全性** 既存の最高速手段を使っても, 暗号系の破壊に途方もない計算時間を要する.

使い捨て鍵暗号

平文　: `muzui`
カギ　: kyhtb (ランダムな文字列)
暗号文 :

▽

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j|	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z|	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

▽

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x|	y	z
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z|	A	B

a	b	c	d	e	f	g|	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
T	U	V	W	X	Y	Z|	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s|	t	u	v	w	x	y	z

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

問題 3.6 (使い捨て鍵暗号復号化) 次の使い捨て鍵暗号文を復号化せよ．鍵 = modnar とする．

`AQKQOR`

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

ランダムな鍵を使うと, 平文がランダムに変換されることになる．盗聴者は暗号文をよく見ても, ランダムな文字列からは平文に関する情報が全く得られない (**完全守秘性**)．理論的には絶対に破られないのに, 使い捨て鍵暗号は広く普及されなかった．その重大な欠点とは?

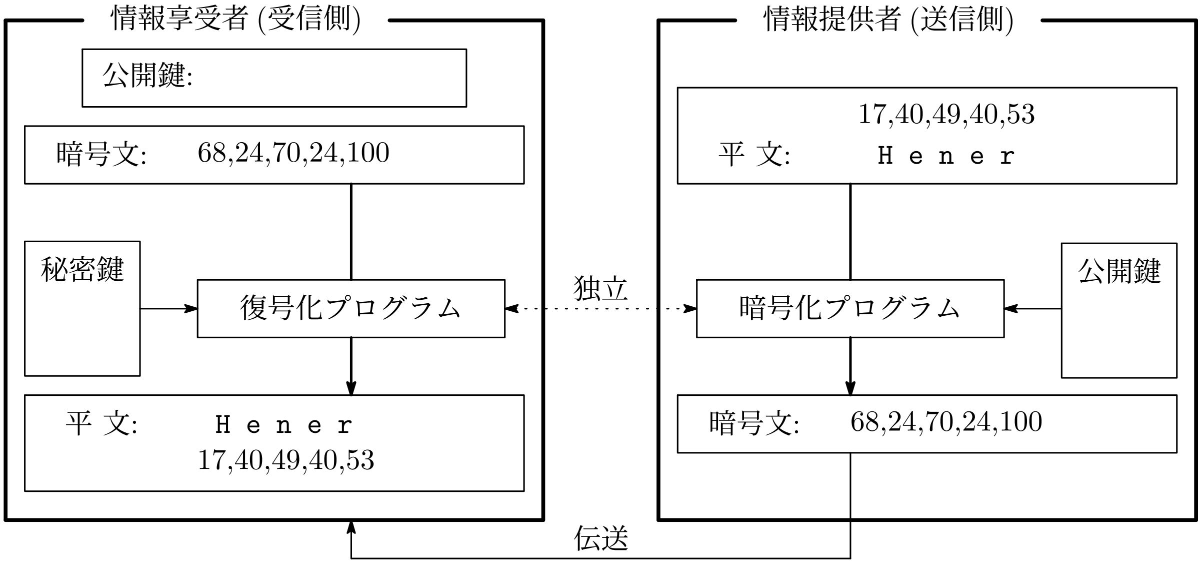
3.4　公開鍵暗号

問題 3.7 (一方向関数) 次の問に答えよ．

(1) 147573952589676412927 は素数か?

(2) 193707721 × 761838257287 を計算せよ.

[公開鍵暗号体系]



公開鍵暗号体系の特徴

- 暗号化の鍵　　復号化の鍵
  公開鍵は公開が可能. [　　　] は誰にも手渡す必要がない.
- 暗号化の手順と復号化の手順は [　　　] している.
  復号化手順の復元は, [　　　] ([　　　] 安全性を高めている).

一方向関数として素因数分解を採用した公開鍵暗号系が RSA[1] 暗号系, ナップザック問題を採用したものにナップザック暗号系が知られている.

[1] リベスト (Ronald L.Rivest), シャミル (Adi Shamir), エイドルマン (Leonald Adleman). 1977 年 4 月.

3.4.1 RSA 暗号

- 一方向関数として素因数分解を利用.

RSA 暗号の仕組み

1. 対応表の作成.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
y	z	,	.	;	!	?	+	-	*	/	<	>	=	@
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74

対応表 3.7

2. 公開鍵の作成.

   ① 2 つの奇素数 p, q を **秘密鍵** とする.

   ② $n = pq(\geqq$ 対応表の大きさ$)$ を求める.

   ③ $p-1, q-1$ 共に **互いに素** な数 E を選ぶ.

   ④ **公開鍵**を (E, n) とする.

   ※ 互いに素：公約数を持たない 2 数.

   ① $p = 7, q = 17$.

   ② $n = 7 \times 17 = 119 \geqq 75$

   ③ 5 と $6 = 7-1$, 5 と $16 = 17-1$ はいずれも互いに素であるから, $E = 5$ を選ぶ.

   ④ $(E, n) = (5, 119)$.

3. 暗号化.

   暗号文字 $=$ 平文字^E % n.

   17^5 % $119 = 68$ (’H’ $= 17$).

4. 復号化.

   ① $f(n) = (p-1)(q-1)$ を求める. (素因数分解の難しさから第三者には不明)

   ② 次の性質を満たす D を求める.

   $$E \times D \,\%\, f(n) = 1.$$

   ③ 平文字 $=$ 暗号文字^D % n.

   ※ D の存在は E が $p-1, q-1$ ともに互いに素であることから保証されている.

   ① $f(119) = (7-1)(17-1) = 96$.

   ② $D = 77$. 実際,

   $$5 \times 77 \,\%\, 96 = 1$$

   を満たしている.

   ③ 68^{77} % $119 = 17$ ($17 =$ ’H’).
   この計算は実際には 77 乗もせずに以下のように求められる.

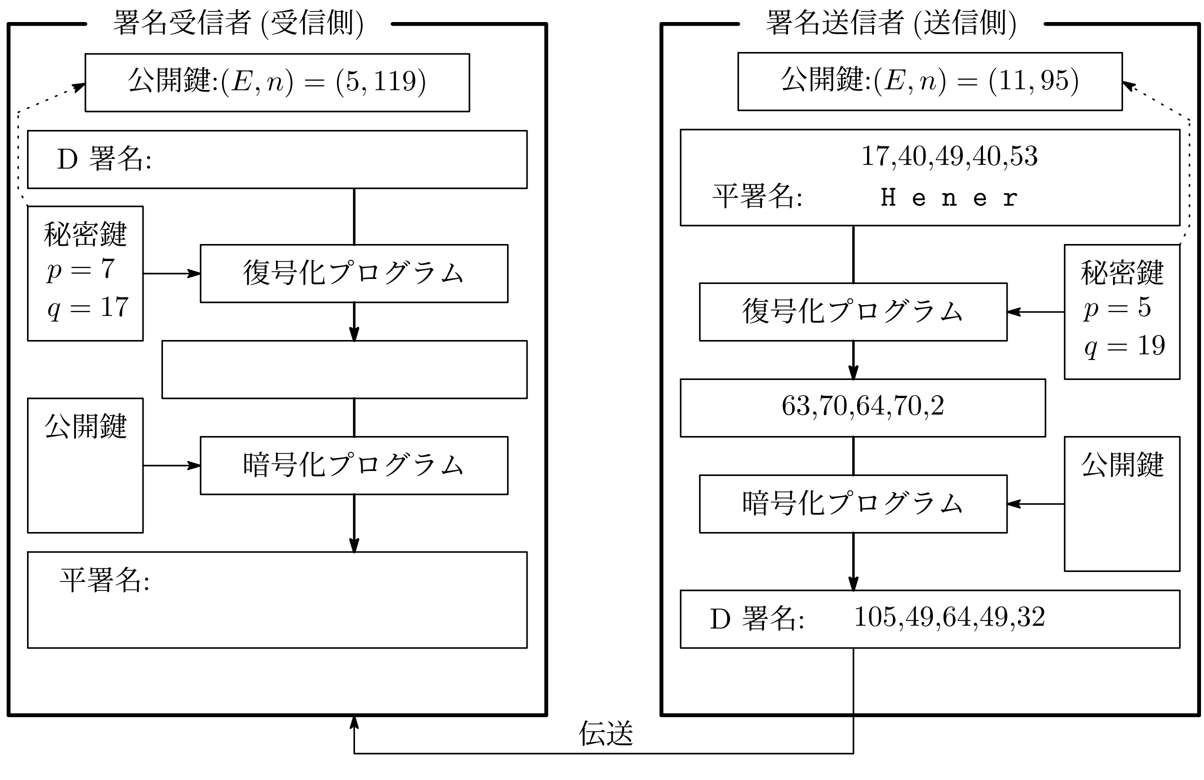
$$
\begin{array}{llllllll}
77 & = & 1+4+8+64 & & & & & \\
68^{1} & \% & 119 & = & \underline{68} & & & \\
68^{2} & \% & 119 & = & 102 & & & \\
68^{4} & \% & 119 & = & 102^2 & \% & 119 = & \underline{51} \\
68^{8} & \% & 119 & = & 51^2 & \% & 119 = & \underline{102} \\
68^{16} & \% & 119 & = & 102^2 & \% & 119 = & 51 \\
68^{32} & \% & 119 & = & 51^2 & \% & 119 = & 102 \\
68^{64} & \% & 119 & = & 102^2 & \% & 119 = & \underline{51} \\
\multicolumn{4}{l}{68 \times 51 \times 102 \times 51} & \% & 119 & = & 17
\end{array}
$$

または引き続き, `68 * 51 % 119 = 17, 17 * 102 % 119 = 68, 68 * 51 % 119 = 17`（答）と求まる.

3.4.2 電子署名

公開鍵暗号系の中でも RSA 暗号は, そのまま電子署名に応用できる. デジタル文書上の署名が本人のものであることが保証される.

1. 署名側.
   - ① 自分の秘密鍵で署名を復号化.
   - ② 相手の公開鍵で暗号化.
2. 受信側.
   - ① 自分の秘密鍵で電子署名を復号化.
   - ② 相手の公開鍵で暗号化.



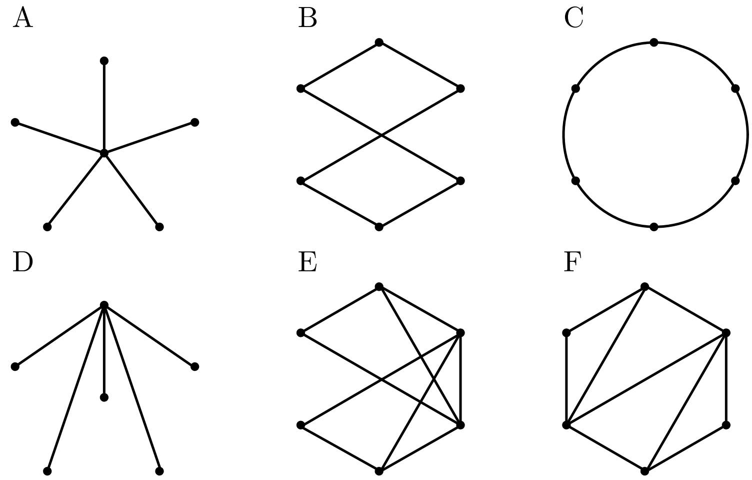
第 4 章　グラフ理論

4.1　トポロジーとグラフ

問題 4.1 (トポロジー的分類) アルファベット大文字をトポロジー的に分類せよ.

A　B　C　D　E　F　G　H　I　J　K　L　M
N　O　P　Q　R　S　T　U　V　W　X　Y　Z

問題 4.2 (ネットワークトポロジー) 下の図において点はコンピュータ, 線はコンピュータ同士をつなぐケーブルを表すものとする. つなぎ方が同じものを分類せよ.



問題 4.3 (回路網設計問題) 以下のマシンをネットワークで結びたい. 各マシンは性能上次の表に示す台数だけそれぞれ接続できる. 接続可能な台数を最大限活用するにはどのように接続すればよいか.

マシン名	A	B	C	D	E	F
接続可能台数	2	2	4	4	3	1

4.2　グラフ理論

問題 4.4 (握手問題) 何人かが互いに握手をする．このメンバーがどのように握手をしても必ず次の性質が成り立つという．何故か? (ただし, 同じ相手とは 2 度以上握手しないものとする．)

(1) 全員の握手回数の総和は偶数である.

(2) 奇数回握手した人の数は必ず偶数人である.

(3) 握手をした人数が同じであるような 2 人が必ず存在する.

- $\boxed{\qquad\qquad}$: 点と辺 (点と点を結ぶ線) だけから作られる図形.
- $\boxed{\qquad\qquad}$: 頂点 v に隣接している頂点の数. つまり, 頂点から出ている辺の本数.

  $\boxed{\qquad\quad}$ = 次数が奇数である頂点.　　　$\boxed{\qquad\quad}$ = 次数が偶数である頂点.

定理 1 ($\boxed{\qquad\qquad\qquad}$) グラフにおいて, 各頂点の次数の総和は常に $\boxed{\qquad\quad}$ である.

定理 2 ($\boxed{\qquad\qquad\qquad}$) グラフにおいて, 奇点の個数は常に $\boxed{\qquad\quad}$ である.

定理 3 ($\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$) グラフにおいて, 次数の等しい 2 点が存在する.

問題 4.5 (鉄道敷設問題)

(1) 四つの駅, 天王寺, 鶴橋, 森ノ宮, 弁天町のどの二つの駅も直接鉄道で結ぶとする．線路は必ずしもまっすぐでなくてもよいが, 互いに交わることなく結びたい．できるか.

(2) 上の四つの駅に京橋を加えた五つの駅ではどうか.

- $\boxed{}$ グラフ：各頂点が他の全ての頂点と辺で結ばれているグラフ.
- $\boxed{}$ グラフ：頂点と辺を平面上にうまく配置すれば, どの辺も交差せずに描けるグラフ.

定理 4 (完全グラフと平面グラフ)

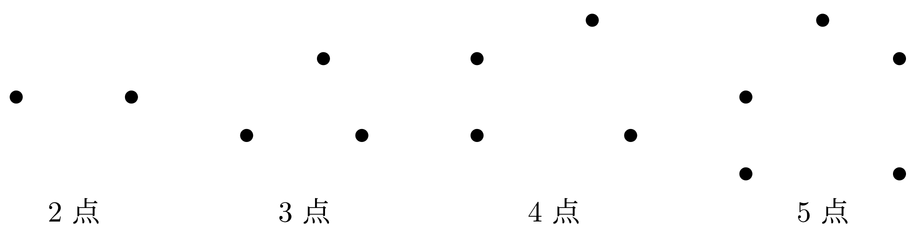
(1) 4 点完全グラフは平面グラフ ________.

(2) 5 点完全グラフは平面グラフ ________.

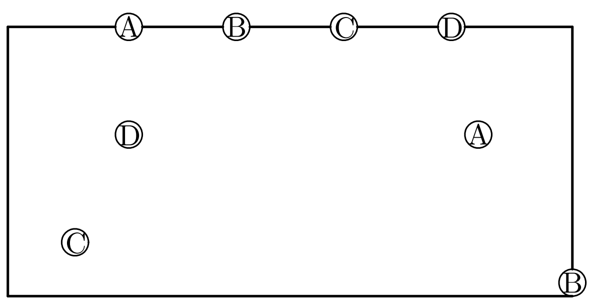
問題 4.6 (配管作業問題) 三軒の家 A, B, C があって, ガス, 水道, 下水の配管作業をする. 3 つの管が交わることなく配管できるか.

問題 4.7 (極大平面グラフ) 平面上にいくつかの点を書いて, 線を交差させないで異なる 2 点を結んでいく. ただし, 線は曲線も認めるものとし, 2 点に対して高々 1 本しか線を引かないものとする.

最大何本まで引けるか.



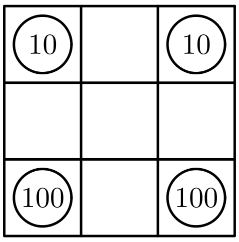
問題 4.8 (プリント基板問題) 次のプリント基板について, 同じ記号の端子同士をプリント配線で結びたい. 交わることなく結ぶことができるか.

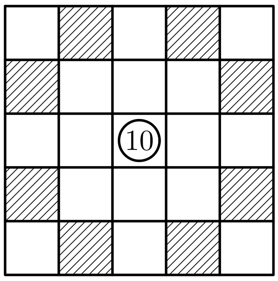


4.3 グラフの応用

問題 4.9 (チェスナイト交換問題) 3×3 の盤に下左図のように 10 円玉と 100 円玉を 2 個ずつ置く. どのコインもチェスのナイト (八方桂馬) 動き (下右図参照) しかできないものとする.

この 10 円玉と 100 円玉の位置を交換するのに, 最少手数何手でできるか.





斜線部の位置に動ける

問題 4.10 (バス停設置問題) ある遊園地には A, B, C, D, E, F, G の 7 ヶ所に乗り物がある. これらの乗り物の場所をまわる園内バスの停留所を次の条件を満たすように決定したい.

1. バスは ① 〜 ⑦ の 7 台とする.
2. どのバスも A 〜 G の内の 3 ヶ所だけを巡回する.
3. A 〜 G のどの場所から乗っても巡回バスをうまく選べば乗り換え無しに他の好きな場所へ移動できる.

① 〜 ⑤ までの巡回バスの停留所を右表のように決定した (例えば ① のバスは B → C → E → B → C → E → $\cdots$ のように巡回するから, B からこのバスに乗れば C と E へは乗り換え無しで移動できる). 残り ⑥ と ⑦ のバスの停留所を決定せよ. (1999 年度レクリエーション数学後期試験問題)

バス	停留所
①	BCE
②	DEG
③	BFG
④	AEF
⑤	ACG
⑥	
⑦	

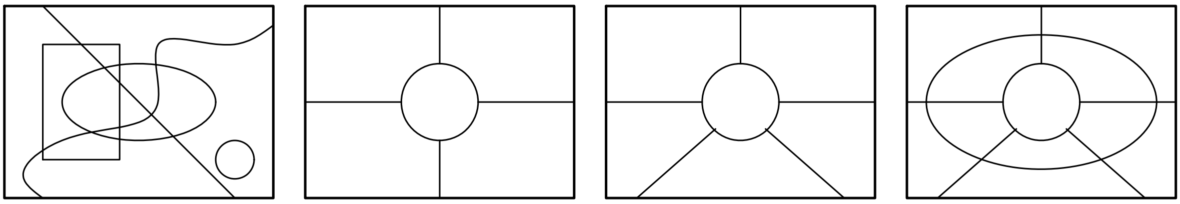
問題 4.11 (握手問題) A 君は彼女と同伴でパーティーに出席し, そこには他に 3 組 (計 4 組) のカップルが同伴で出席していた. いろいろな人々の間で握手が交わされた. どの人も自分の同伴者とは握手せず, どの人も同じ人とは一度しか握手せず, また当然ながら誰も自分自身とは握手をしなかった.

握手をした後, A 君は彼の彼女を含めた各人に, 他の人と何回握手を交わしたかと尋ねた. すると, どの人も異なる回数を答えた (ただし, 「誰とも握手をしなかった」場合は「 0 回握手をした」と考える)

さて, A 君の彼女は何回握手をしたか ? (1997 年度レクリエーション数学前期試験問題)

問題 4.12 (塗り分け問題)

(1) 次の図を最少の色数で塗り分けよ. [1]



ア　　　イ　　　ウ　　　エ

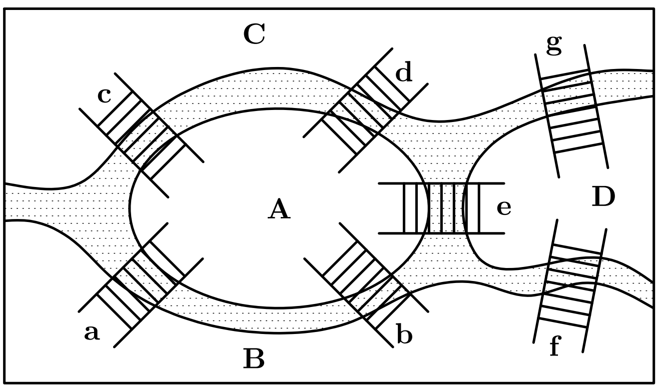
(2) 塗り分けにできるだけ多くの色を必要とするような図を描け.

定理 5 (地図の $\boxed{\quad}$ 定理) 平面上に描かれたどんな地図も $\boxed{\quad}$ 以下で塗り分けが可能である.

1878 年ロンドンの数学会でケレイが提出して以来, 約 100 年間未解決だった. 1976 年, アメリカの数学者アッペルとハーケンによって, 当時の計算機を総計 1200 時間も駆使してようやく解決された.

4.4　一筆書きと頂点巡り

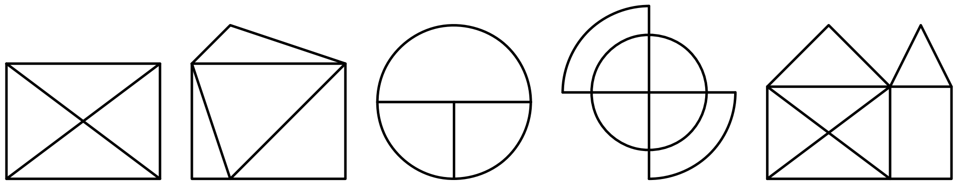
問題 4.13 (ケーニヒスベルグの橋渡り問題) 次の図で, 全ての橋をそれぞれ 1 回ずつ渡り, 出発点に立ち戻るルートはあるか.



[1]「塗り分ける」とは「隣合う領域を異なる色で塗る」こと.

問題 4.14 (一筆書き)

(1) 次の内, 一筆書きできるものはどれか.



ア　　イ　　ウ　　エ　　オ

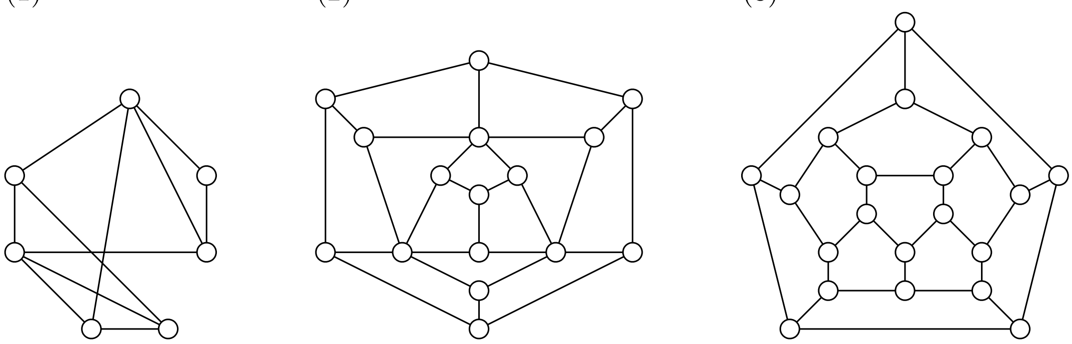
(2) (1) の内, 出発点に戻って来られるものはどれか.

定理 6 (一筆書き可否判定)

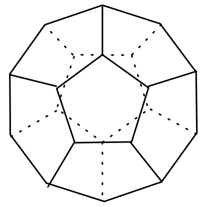
$$\text{一筆書き可能} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{}\text{が}\boxed{}\text{個 または}\boxed{}\text{個}$$

問題 4.15 (頂点巡り) 次の図はそれぞれ遊園地のアミューズメントとそれらを結ぶ歩道を図示したものである. 各遊園地において, 全てのアミューズメントをちょうど一度ずつだけ訪れるような順路はあるか?

(1)　　(2)　　(3)



問題 4.16 正十二面体の稜に沿って各頂点をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る順路はあるか?

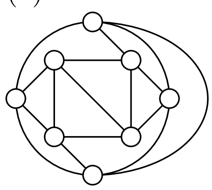


問題 4.17 (連絡網設計問題) 8 人からなるグループがある. 次の表はお互いに知人である関係を表にしたものである (○は互いに知人であること, ×は互いに面識がないことを示す). 伝えたい情報をあるメンバーを出発点にして, 知人を通じて各メンバーにちょうど 1 回ずつ順次知らせていき, 最後の人が最初の人にその情報を (全メンバーに伝わったという意味で) 返すというような情報伝達連絡網を設計せよ.

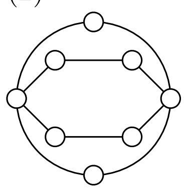
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1		○	○	×	○	○	×	○
v_2	○		○	○	×	○	○	×
v_3	○	○		×	○	○	×	○
v_4	×	○	×		○	○	×	○
v_5	○	×	○	○		×	○	×
v_6	○	○	○	○	×		○	○
v_7	×	○	×	×	○	○		○
v_8	○	×	○	○	×	○	○	

問題 4.18 (一筆書きと頂点巡り) 次の図をそれぞれ一筆書き可能なものと不可能なもの, 頂点巡り可能なものと不可能なものに分類せよ.

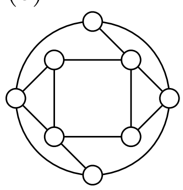
(1)



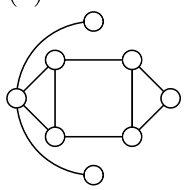
(2)



(3)



(4)



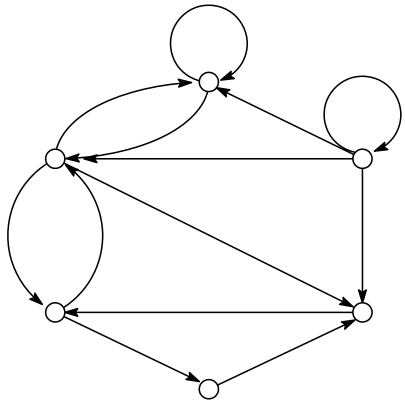
4.5 有向グラフ

問題 4.19 (しりとり可能性問題) 次に示すそれぞれの単語の集合 V_1, V_2 において, その中の各単語を丁度 1 回ずつ, しかもすべての単語を読み上げて, 最初の単語に戻るようなしりとり遊びは可能か. 可能ならばそれを示し, 不可能ならばその理由を答えよ.

(1) $V_1 = \{$ ウミバト, トラ, コアラ, ダチョウ, ラッコ, ラクダ, ウンピョウ (豹の仲間)$\}$

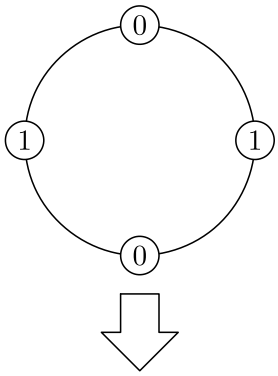
(2) $V_2 = \{$ コイノボリ, キンコ, ミサキ, カミ, メダカ, カメ, カラス, スイカ, スズメ, リス, メガネ, ネズミ $\}$

- $\boxed{}$: 頂点および向きを持つ辺 (**弧**) だけから作られる図形.

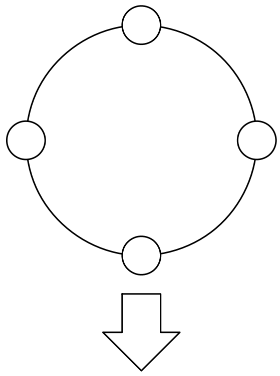


問題 4.20 (2 進数値の円形配列問題)

(1) 0 と 1 を円形に重複を許して 4 個配列する. このとき, 円形の円周にそって, 連続した 2 個の数字の列を一つずつ数字をずらしながら順次 4 個取り出して, それらが全て異なりしかも 2 桁の 2 進数値が全て現れるようにしたいとする. どのように配列したらよいか.

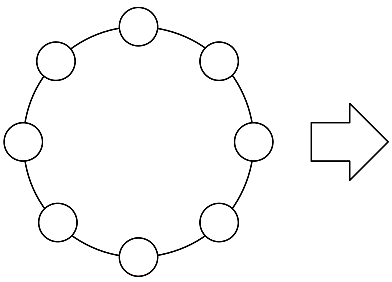


01, 10, 01, 10
(失敗)

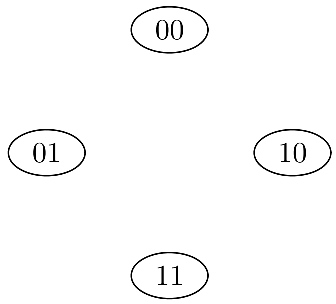


00, 01, 10, 11
(順序はこの通りでなくてよい)

(2) 配列する 0 と 1 を 8 個にして, 連続した 3 個の数字の列を順次 8 個取り出したとき, それらが全て異なりしかも 3 桁の 2 進数値が全て現れるようにしたいとする. どのように配列したらよいか.



000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
(順序はこの通りでなくてよい)

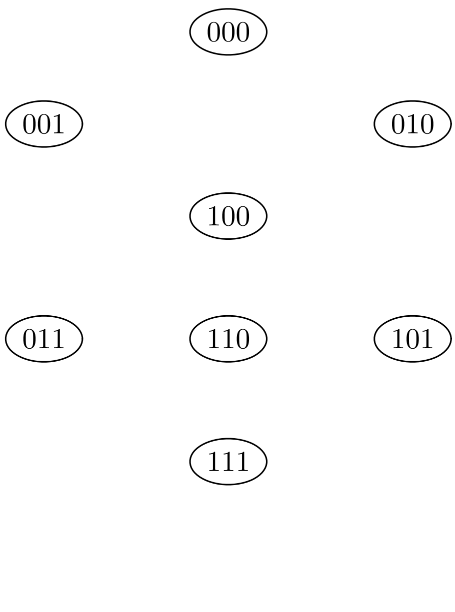


問題 4.21 (カードマジック設計問題) ♣, ♠, ♢, ♡ 各 1 〜 4 までの 16 枚のトランプでセットカード (予めタネを仕込んで並べたカードの組) を用意する．この中から連続 4 枚のカードを相手に選んでもらい, 順にカードの色 (赤か黒か) を言ってもらう．この 4 枚の色を聞いただけで, 1 枚目のカードを言い当ててしまう．

さらに, 続く 5 枚目のカードの色を聞くと, 2 枚目のカードが, 6 枚目のカードの色を聞くと, 3 枚目のカード, 7 枚目のカードの色を聞くと, 4 枚目のカードをそれぞれ言い当ててしまう (順次いくらでも言い当てられる).

セットカードはどのように並べてあったのか？

	1	2	3	4
♣	♣A	♣2	♣3	♣4
♠	♠A	♠2	♠3	♠4
♢	♢A	♢2	♢3	♢4
♡	♡A	♡2	♡3	♡4



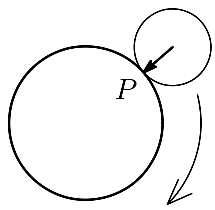
第5章　計算しない図形問題

5.1　回る

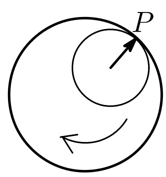
問題 5.1 (大円小円問題) 小円は直径 1 の円, 大円は直径 2 の円とする.

(1) 大円の円周に等しい長さの線分上を, 線分の左端から右端まで小円が滑ることなく転がるとき, 小円は何回転するか.

(2) 小円が大円の周上を外接しながら滑ることなく一周するとき, 小円は何回転するか.



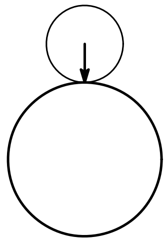
(3) 小円が大円の周上を内接しながら滑ることなく一周するとき, 小円は何回転するか.



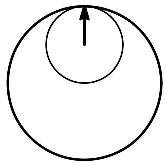
問題 5.2 (軌跡) 問題 5.1 の (1) 〜 (3) において, ↓ の先端 P はどのような軌跡を描くか?

(1)

(2)



(3)



問題 5.3 (アルキメデスの車輪) お皿をテーブル XY の上を滑らないように, 点 A から点 B のところまで 1 回転させると, お皿の周は線分 AB の長さに等しいと考えられる.

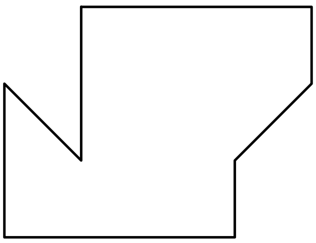
さて, そのお皿には同心円の底がついているものとする. テーブルの面 XY と平行に, お皿の底が触れるように板 PQ をあてがう. お皿を XY の上に 1 回転させると, お皿の底の方も PQ の上を 1 回転して, 点 M から点 N までくる. すると, お皿の底の周はこの線分 MN の長さに等しいことになる. MN と AB の長さは等しいから, お皿の底の周とお皿の周は長さが一致する.

このことから, 同心円の周は皆等しい？

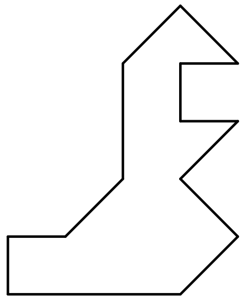
5.2 切る

問題 5.4 (区分け問題)

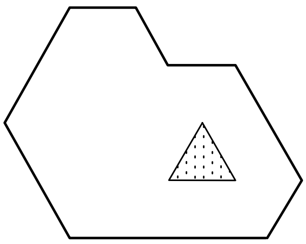
(1) 次の図形をそれぞれ合同な図形に 2 等分割せよ.



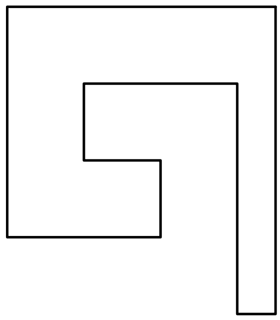
①



②

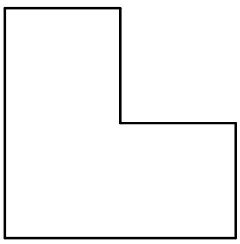


③



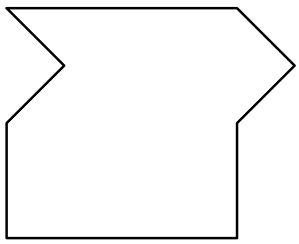
④

(2) 次の図形をそれぞれ合同な図形に 4 等分割せよ.



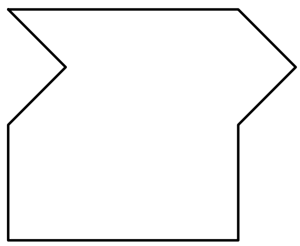
①

②

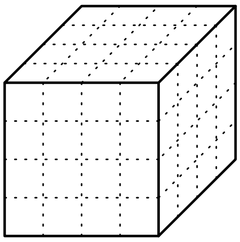


③

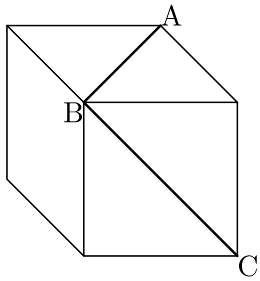
(3) (2) ③の図形を, 今度は合同な図形に 5 等分割せよ.



問題 5.5 1 個の立方体を切断して 64 個の小立方体を得るには最低限何回切断すればよいか.



問題 5.6 次の立方体において ∠ ABC を求めよ.

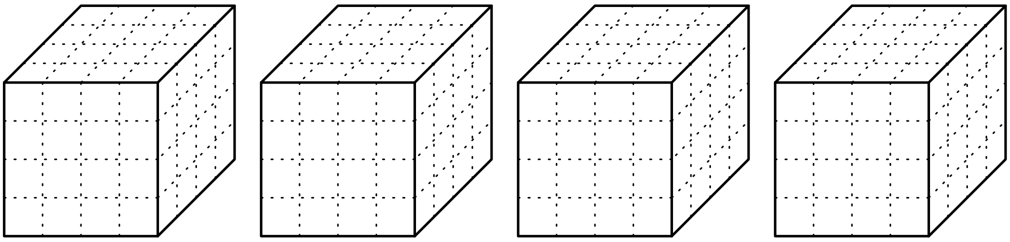


問題 5.7 (切断面積を最大に切る)

1. 立方体の切断面が三角形になるように切断するとき, 面積が最大になるようにするにはどのように切断すればよいか.

2. 立方体の切断面が四角形になるように切断するとき, 面積が最大になるようにするにはどのように切断すればよいか.

(考察用の図)

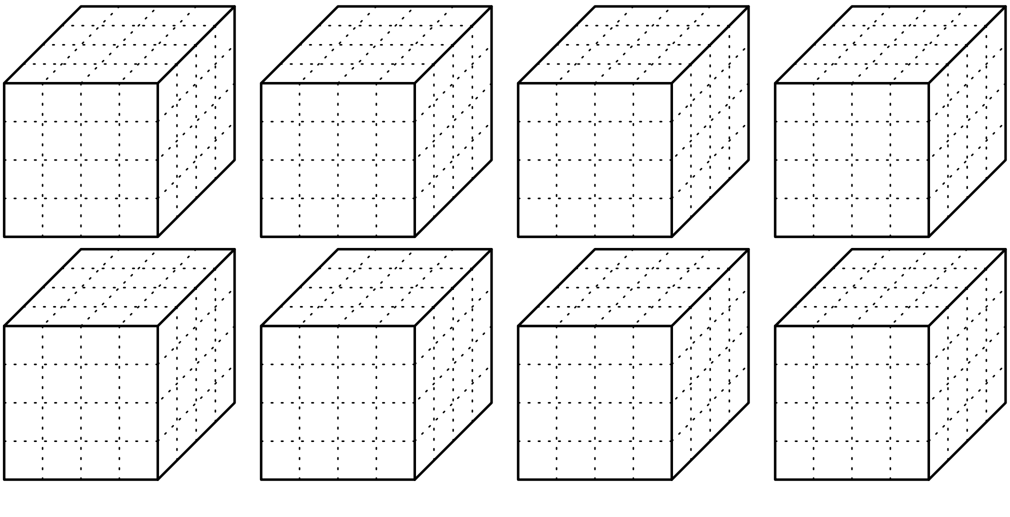


問題 5.8 (立方体の切断面) 次のうち, 立方体を平面で切ったときにできる切り口の図形はどれか. すべてあげよ.

ア. 正三角形　イ. 正方形　ウ. 正五角形　エ. 正六角形　オ. 正七角形
カ. 直角三角形　キ. 長方形　ク. 平行四辺形　ケ. ひし形　コ. 等脚台形

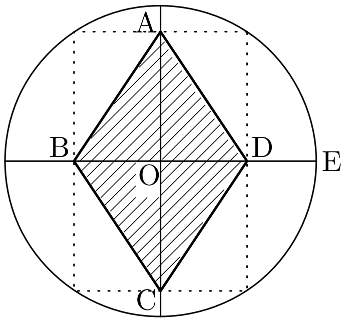
ただし, カ〜ケは一般の形とする.

(考察用の図)

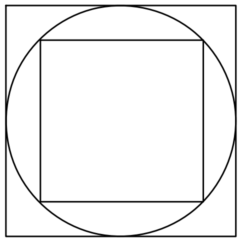


5.3 ヒラメキで求める長さと面積

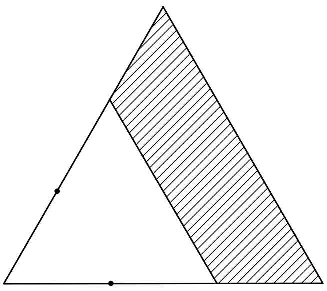
問題 5.9 $\mathrm{OD} = 5\mathrm{cm}, \mathrm{DE} = 4\mathrm{cm}$ のとき，ひし形 ABCD の一辺 CD の長さを求めよ．



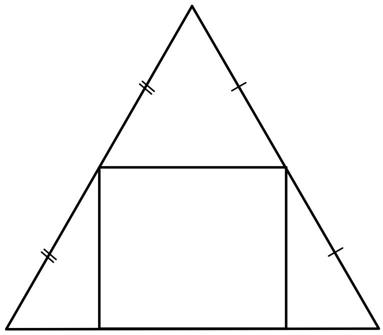
問題 5.10 次の図において，円に内接する正方形の面積は，その円に外接する正方形の面積の何分のいくつか．



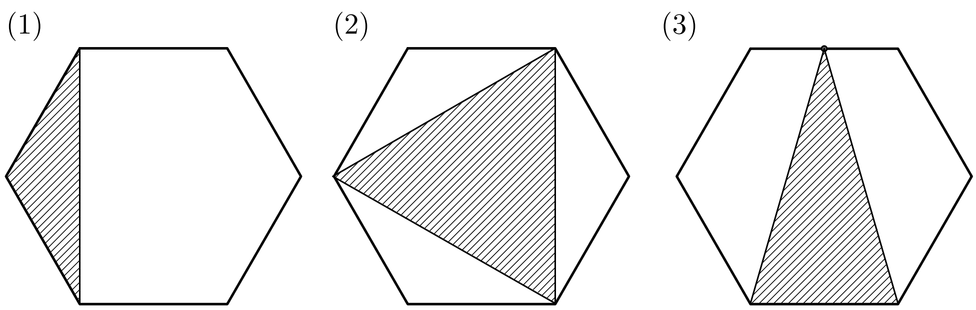
問題 5.11 正三角形の 2 辺の 3 等分点を図のように結んだときにできる斜線部分の台形の面積は正三角形の面積の何分のいくつか．



問題 5.12 正三角形の 2 辺の中点を結んで，図のように正三角形の内部に作った長方形の面積は正三角形の面積の何分のいくつか．

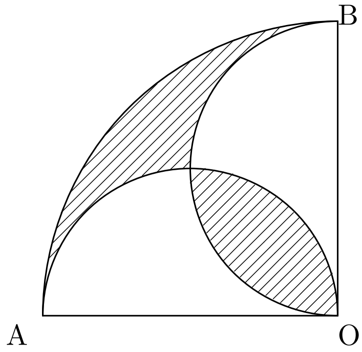


問題 5.13 次の斜線部分の面積は正六角形の面積の何分のいくつか．

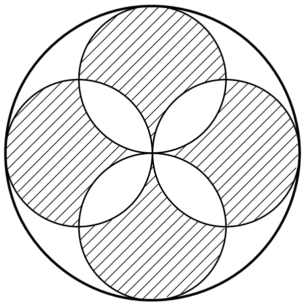


(黒丸印は辺の中点)

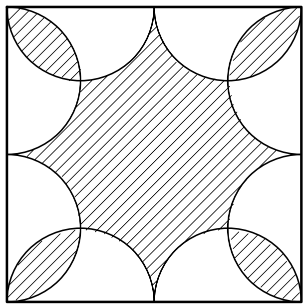
問題 5.14 半径 OA の 4 分の 1 円 AOB の中に, OA, OB を直径とする半円をそれぞれ次のように描いた. OA = 2cm としたとき, 斜線部分の面積を求めよ.



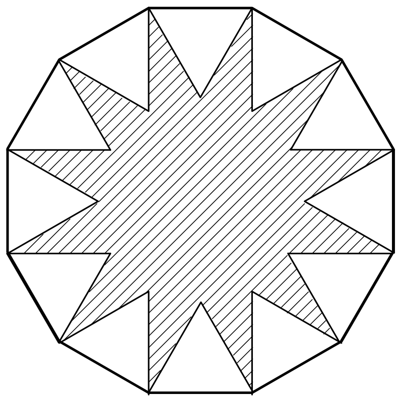
問題 5.15 半径 2cm の大円の中に, 半径 1cm の小円を 4 つ図のように描く. 斜線部分 (4 つのイチョウの葉) の面積を求めよ.



問題 5.16 1 辺 4cm の正方形内に, 8 つの半円を描いた. 斜線部分の面積を求めよ.



問題 5.17 (チャレンジ応用問題！) 下の図のような, 1 辺 1cm の正十二角形があり, 白い部分は各辺を 1 辺とする正三角形 12 個である. 斜線部分の面積を求めよ.



第6章　命題論理

6.1　命題

定義 1 (命題) 「ほんとう」か「うそ」かのどちらか一方に決めることができるような文（平叙文）を［　　　　］という.

命題としては正しい（　　）命題と, 間違っている（　　）命題の二種類しか考えない. このような論理の立場を［　　　　　　］という. ■

問題 6.1 次の文は命題か.

(1) 平井先生 は（　　）である.

(2) 平井先生 は（　　　）である.

(3) 学籍番号（　　　　　）の学生は眼鏡をかけている.

(4) あなたの担任は平井先生より年上である.

(5) あなたの担任は平井先生よりかっこいい.

(6) 今年阪神タイガースは優勝するかも知れない.

(7) 今年阪神タイガースは優勝する.

(8) $1 \div 3 = 0.333\cdots\cdots$ の小数部分には, 3 が 10 個並ぶ箇所がある.

(9) 円周率 $3.1415926\cdots\cdots$ の小数部分には, 9 が 10 個並ぶ箇所がある.

(10) この文はウソだ.

命題にはそれ以上分解すると意味が壊れてしまう**原始命題**と原始命題を組み合わせて構成された**合成命題**がある. 命題を $A, B, C, \ldots$ などで表し, 特に原始命題であることを強調する場合は $p, q, r, \ldots$ などで表すことにする.

（例）　「昨日は雨降りだった.」　　　「今日は雨降りだ.」

　　　　「昨日も今日も雨降りだ.」

命題を記号的に表現したものを**論理式**というが, ここでは単に「式」と呼ぶことにする.

真な命題を［　］, 偽な命題を［　］

で表す. 2 つの命題 A, B の真偽がつねに一致することは, 同値式

$$A \equiv B$$

によって表される. さらに,

$$\text{「命題 } A \text{ は真である.」は } A \equiv \mathbf{1},$$
$$\text{「命題 } B \text{ は偽である.」は } B \equiv \mathbf{0}$$

とかくことにする.

6.2 否定

「今日は雨だ」という命題が正しい ($\mathbf{1}$) とき, 「今日は雨でない」という命題は間違い ($\mathbf{0}$) である. もし, 前者の命題が間違い ($\mathbf{0}$) であるなら, 後者の命題は正しい ($\mathbf{1}$). このように命題 A と真偽が全く反対になるような命題を A の **否定** という.

定義 2 (否定)
命題 A, B について,

$$A \equiv \mathbf{1} \text{ のとき } B \equiv \mathbf{0},$$
$$A \equiv \mathbf{0} \text{ のとき } B \equiv \mathbf{1}$$

となるとき, B を A の［　　　　］といい, B を $\neg A$ で表す. ■

A	$\neg A$
$\mathbf{1}$	
$\mathbf{0}$	

表 6.1 : 否定

問題 6.2 次の命題の否定を作れ.

(1) 2は素数である.

(2) あの人は男だ.

(3) 平井先生も Dr.Hener も指示棒を使う.

(4) 平井先生または Dr.Hener は白衣を着ている.

(5) どの先生もチョークを使う.

(6) 小道具を使う先生がいる (ある先生は小道具を使う).

右図において,

スイッチ　p = `ON` ⇔ 電灯 =
(入力)　　　(出力)

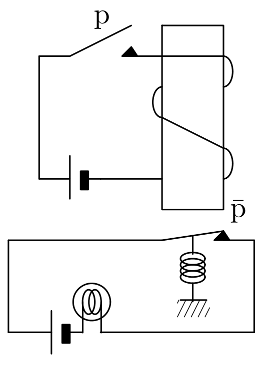


図 6.1: `NOT` スイッチ

《パラドックス》 次の命題の否定を作れ.

1. この文の終わりの文字は「だ」だ

2. この文の文字数は十五文字だ

公式的に成り立つことを列挙するが, 覚えるのではなく, 納得して頂きたい.

(1) $\neg\mathbf{1} \equiv \quad$, (1°) $\neg\mathbf{0} \equiv \quad$,

(2) $A \equiv \mathbf{1} \Leftrightarrow \neg A \equiv \quad$, (2°) $A \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \neg A \equiv \quad$,

(3) $A \equiv B \Leftrightarrow \quad A \equiv \quad B$,

(4) $\neg\neg A \equiv \quad$,

(5) $A \equiv \neg B \Leftrightarrow \quad A \equiv B$.

6.3 論理積

命題 P:「平井先生も Dr.Hener も男である. 」を考える. この命題は次の 2 つの命題に分解できる.

p :「平井先生は男である.」
q :「Dr.Hener は男である.」

元の合成命題 P は p も q も真のときのみ真であり, それ以外の場合は偽である. このような命題を (p と q の) **論理積** という.

定義 3 (論理積)
命題 A, B について,

$$\begin{array}{ll} A \equiv \mathbf{1}, B \equiv \mathbf{1} \text{ のとき} & \mathbf{1}, \\ \text{それ以外のとき} & \mathbf{0} \end{array}$$

となる命題を A と B の [ ] といい, $A \wedge B$ で表す.■
(と読む)

A	B	$A \wedge B$
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

表 6.2: 論理積

問題 6.3 ある人 a について「 a さんは女だ」を W で, 「 a さんは独身だ」を S で, 「a さんは働いている」を J で表すことにしたとき, 次の文章を記号化せよ.

(1) a さんは男だ.

(2) a さんはミセスだ.

(3) a さんはダンナがいるのに, 働いている.

(4) a さんは妻帯者だが, 失業している.

(5) a さんは独身 OL だ.

p	q	電灯
ON	ON	
ON	OFF	
OFF	ON	
OFF	OFF	

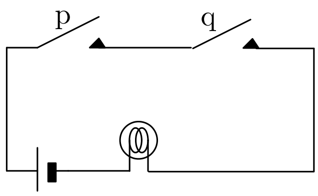


図 6.2: AND スイッチ

公式的に成り立つことを列挙するが, 覚えるのではなく, 納得して頂きたい.

(6) $A \wedge B \equiv \quad \wedge \quad ,$ $\wedge$ の交換律

(7) $A \wedge B \wedge C \equiv A \wedge B \wedge C,$ $\wedge$ の結合律

(8) $A \wedge A \equiv \qquad ,$ $\wedge$ の巾等律

(9) $A \wedge \mathbf{1} \equiv \qquad ,$

(10) $A \wedge \mathbf{0} \equiv \qquad .$

6.4 論理和と排他的論理和

次の 2 つの合成命題を考える.

P :「彼女の結婚相手は有名人か金持ちだ.」 Q :「次のバッターは三振かフォアボールだ.」

それぞれ原始命題に分解すると次のようになる

$$P \begin{cases} p_1 : \text{「彼女の結婚相手は有名人だ.」} \\ p_2 : \text{「彼女の結婚相手は金持ちだ.」} \end{cases} \quad Q \begin{cases} q_1 : \text{「次のバッターは三振だ.」} \\ q_2 : \text{「次のバッターはフォアボールだ.」} \end{cases}$$

命題 P では p_1 と p_2 を同時に成り立たせる場合が考えられるが, 命題 Q については q_1 と q_2 が同時に成り立つ場合は考えられない.

p_1	p_2	P
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

q_1	q_2	Q
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

定義 4 (論理和)
命題 A, B について,

$A \equiv \mathbf{0}, B \equiv \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{0}$,
それ以外のとき $\mathbf{1}$

となる命題を A と B の [ ] といい, $A \vee B$ で表す.■
(と読む)

A	B	$A \vee B$
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

表 6.3: 論理和

定義 5 (排他的論理和)
命題 A, B について,

$A \equiv B$ のとき $\mathbf{0}$,
それ以外のとき $\mathbf{1}$

となる命題を A と B の [ ] といい, $A \veebar B$ で表す.■
(と読む)

A	B	$A \veebar B$
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

表 6.4: 排他的論理和

注意 6.1 (“または” には 2 通りある!!)
　数学では単に「または」と言うと, 一般に論理和を指すが, 日常言語での「または」が論理和か排他的論理和であるかは極めて曖昧である.

問題 6.4 次の各命題について, 論理積, 論理和, 排他的論理和のいずれが考えられるか分類せよ.

(1) 赤ちゃんはお腹が空いたか, おむつが濡れたのだ.

(2) 明日はみぞれが降る. (注.「みぞれ」 ＝ 雨混じりの雪)

(3) 明日は雨または雪が降る.

(4) このカードはハートまたはダイヤである.

問題 6.5 悩みごと一件につき 1000 円の見料をとる占い師がいる. 今, 君は次の 2 つの悩みがあり, どうするべきかこの占い師に占ってもらおうと考えている.

1. 結婚相手は平井先生にするか, Dr.Hener にするか.
2. 新婚旅行はハワイに行くか, 北海道に行くか.

見料を 1000 円で済ませるには, 占い師にどのように質問すればよいか.

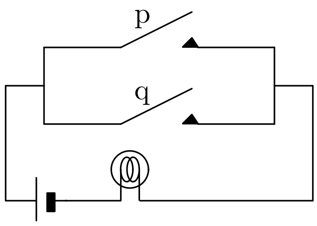


図 6.3: OR スイッチ

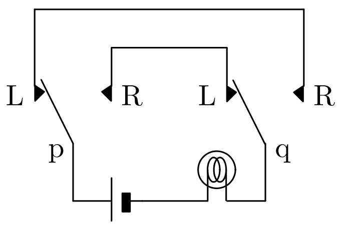


図 6.4: EOR スイッチ

p	q	図 6.3	図 6.4
ON(L)	ON(L)		
ON(L)	OFF(R)		
OFF(R)	ON(L)		
OFF(R)	OFF(R)		

公式的に成り立つことを列挙するが, 覚えるのではなく, 納得して頂きたい.

(6°) $A \vee B \equiv \quad \vee \quad$, $\vee$ の交換律

(7°) $A \vee B \vee C \equiv A \vee B \vee C$, $\vee$ の結合律

(8°) $A \vee A \equiv \qquad$, $\vee$ の巾等律

(9°) $A \vee \mathbf{1} \equiv \qquad$,

(10°) $A \vee \mathbf{0} \equiv \qquad$.

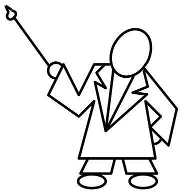
6.5　含意

今, 次の命題を絶対的な真理とする.

命題 P:「Dr.Hener は必ず白衣を着ている.」
（Dr.Hener ならば 白衣を着ている.）

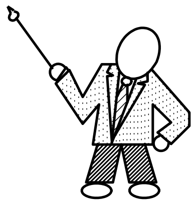
次の内, この真理に反する人物はどれか.

① Dr.Hener である.
白衣を着ている.



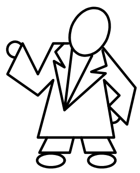
Dr.Hener

② Dr.Hener である.
白衣を着ていない.



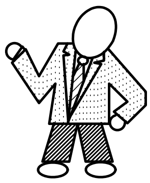
Dr.Hener

③ Dr.Hener でない.
白衣を着ている.



平井

④ Dr.Hener でない.
白衣を着ていない.



平井

	命題 A Dr.Hener である	命題 B 白衣を着ている	Dr.Hener ならば 白衣を着ている
①			
②			
③			
④			

以上の結果から “A ならば B” を次のように定義する.

定義 6 (含意)
命題 A, B について,

$$\begin{array}{ll} A \equiv \mathbf{1}, B \equiv \mathbf{0} \text{ のとき} & \mathbf{0}, \\ \text{それ以外のとき} & \mathbf{1} \end{array}$$

となる命題を A と B の［　　　　］といい, $A \to B$ で表す.■
（　　　と読む）

A	B	$A \to B$
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

表 6.5: 含意

※ $A \to \mathbf{1} \equiv$ 　　　 $, \mathbf{0} \to B \equiv$ 　　　 .

問題 6.6 (1) 命題 P :「カエルが鳴くと, 雨が降る.」とする. P が真になるのは次の内どれか.

① ある日, カエルが鳴きました. すると雨が降った.

② ある日, カエルが鳴きました. でも雨は降らなかった.

③ ある日, カエルは鳴かず, 雨も降らなかった.

④ ある日, カエルは鳴かなかったのに, 雨が降った.

(2) P :「同情するなら金をくれ!」(古くてゴメン!)という安達祐美が腹を立てるのは次の内, どの人でしょう.

① 同情するし, お金もくれる人.

② 同情するが, お金はくれない人.

③ 同情しないが, お金はくれる人.

④ 同情しないし, お金もくれない人.

問題 6.7 次の命題の真偽を(判定できるものは)判定せよ.

(1) 荒川が金メダル ならば 浅田も金メダルだ.

(2) 幽霊が存在する ならば 火の玉は存在する.

(3) 君が満点を採る ならば 地球は三角だ.

(4) 太陽が西から昇れば 君は日本一の美人だ.

(注意) B だけの真偽と $A \to B$ 全体の真偽を混同しないこと.

問題 6.8 (蛇足問題) (1) 阪神が勝った前日には必ず予言者 X は「明日阪神は勝つ」と予言しているという. なぜか?

(2) アフリカのある地方のある部族では, 雨乞いの儀式で踊りを踊るのだが, この部族が踊ると必ず雨が降るという. なぜだろうか.

6.6 真偽表

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \to B$
1	**1**					
1	**0**					
0	**1**					
0	**0**					

注意 6.2 (論理記号の優先順位)
結びつきは $\neg$ が最強, 次いで $\wedge$, $\vee$, $\veebar$ が強く, $\to$ は最も弱い.

例 6.1 次の命題の真偽表を作成せよ.

(1) $\neg A \veebar B$ (2) $\neg((A \veebar B) \vee C) \vee (\neg A \veebar B)$

A	B	$\neg A \veebar B$

A	B	C	$\neg((A \veebar B) \vee C) \vee (\neg A \veebar B)$

問題 6.9 次の命題の真偽表をそれぞれ作成せよ.

(1) $\neg(A \wedge B)$ (2) $A \wedge \neg A$ (3) $A \wedge (A \vee B)$ (4) $\neg A \wedge \neg B$
(5) $\neg A \vee \neg B$ (6) $\neg(A \vee B)$ (7) $\neg A \vee A$ (8) $A \vee (A \wedge B)$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$A \wedge \neg A$	$A \wedge (A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee A$	$A \vee (A \wedge B)$

問題 6.10 次の命題の真偽表をそれぞれ作成せよ.

(1) $A \wedge (B \vee C)$ (2) $A \vee (B \wedge C)$ (3) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

定義 7 (恒真・恒偽)
真偽表がつねに **1** となる命題を［　　　］という.
真偽表がつねに **0** となる命題を［　　　］という. ■

定義 8 (同値)
真偽表が等しい 2 つの命題 A, B は互いに［　　　］であるといい,［　　　］で表す. ■

$$
\begin{array}{llll}
A \vee \neg A \equiv \quad , & & A \wedge \neg A \equiv \quad , & \\
\neg(A \wedge B) & \neg A \vee \neg B, & \neg(A \vee B) & \neg A \wedge \neg B, \\
A \wedge (A \vee B) & A, & A \vee (A \wedge B) & A, \\
A \wedge (B \vee C) & (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) & (A \vee B) \wedge (A \vee C).
\end{array}
$$

考察 例 6.1 の 2 つの命題について, 次のように真偽表を作成してみる.

A	B	C	$\neg A \veebar B$	$\neg((A \veebar B) \vee C) \vee (\neg A \veebar B)$

これより,

$$\neg A \veebar B \qquad \neg((A \veebar B) \vee C) \vee (\neg A \veebar B).$$

問題 6.11 (1) 各真偽表を完成せよ.

(2) 互いに同値な組み合わせはどれか.

① $A \wedge \neg B$　② $\neg A \vee B$　③ $A \to B$　④ $\neg(A \to B)$
⑤ $\neg A \to B$　⑥ $B \to A$　⑦ $\neg B \to \neg A$

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \vee B$	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$\neg A \to B$	$B \to A$	$\neg B \to \neg A$
1	**1**							
1	**0**							
0	**1**							
0	**0**							

公式

$$
\begin{array}{rcccc}
A \to B & \equiv & A & & B \\
 & \equiv & & \to & \\
\neg(A \to B) & \equiv & A & & B
\end{array}
$$

注意 6.3

上の公式からも, 安達祐美の主張は,

命題 Q :「同情するな または 金をくれ」

さらに,

命題 R :「金をくれない ならば 同情するな」

となる.

問題 6.12 次の各真偽表を完成せよ.

① $A \to \neg B$ ② $\neg A \to \neg B$ ③ $(A \to B) \to B$ ④ $(A \to B) \to (A \wedge B)$
⑤ $(B \to A) \to A$ ⑥ $A \wedge (A \to B) \to B$ ⑦ $A \to A \vee B$
⑧ $A \to (B \to C)$ ⑨ $A \wedge B \to C$ ⑩ $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

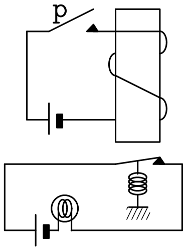
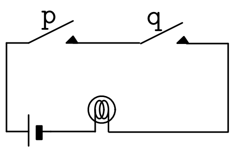
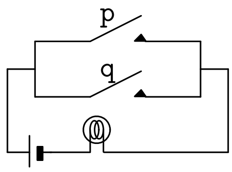
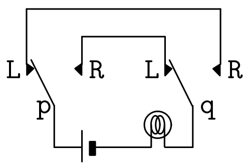
A	B	$A \to \neg B$	$\neg A \to \neg B$	$(A \to B) \to B$	$(A \to B) \to (A \wedge B)$
1	**1**				
1	**0**				
0	**1**				
0	**0**				

A	B	$(B \to A) \to A$	$A \wedge (A \to B) \to B$	$A \to A \vee B$
1	**1**			
1	**0**			
0	**1**			
0	**0**			

A	B	C	$A \to (B \to C)$	$A \wedge B \to C$	$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
1	**1**	**1**			
1	**1**	**0**			
1	**0**	**1**			
1	**0**	**0**			
0	**1**	**1**			
0	**1**	**0**			
0	**0**	**1**			
0	**0**	**0**			

第 7 章　命題論理の応用

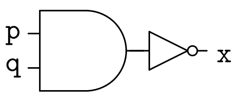
7.1　論理回路

p　q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
1　1 **1　0** **0　1** **0　0**				
図				
記号				

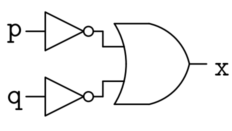
問題 7.1 次の各論理回路に次のデータを入力した場合, x から出力される値はどうなるか.

p : 1100　　　　q : 1010

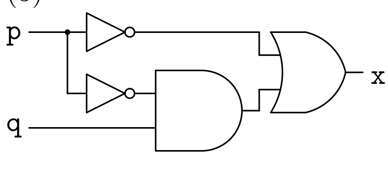
(1)



(2)



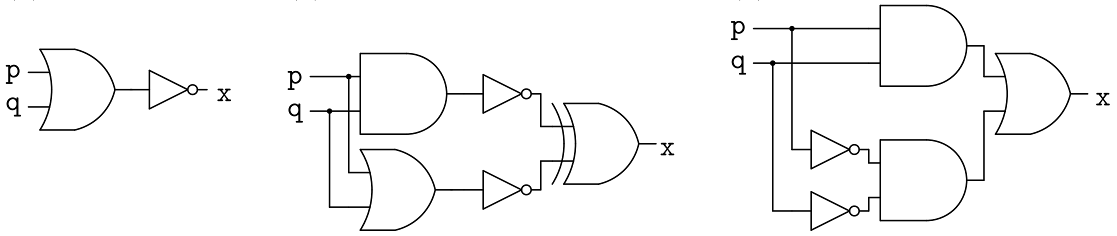
(3)



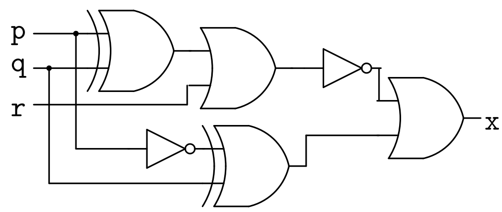
問題 7.2 次の各論理回路に次のデータを入力した場合, x から出力される値はどうなるか.

p : 1100　　　　　q : 1010

(1)　　　　　　(2)　　　　　　(3)



例 7.1 次の論理回路 L に次のデータを入力した場合, x から出力される値はどうなるか.



（入力データ）　　　　　（出力データ）

p : 11110000　　　　　x :

q : 11001100

r : 10101010

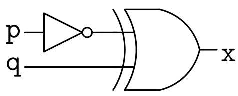
考察 例 7.1 の論理回路 L を命題を表すような式になおしてみると,

論理回路 L = $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ≡ $\boxed{\qquad\qquad}$

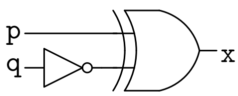
↑

例 6.1 の考察

従って, 複雑な論理回路 L は次のシンプルな回路に変換できる.



問題 7.3 次の論理回路について, 同じ入力に対し同じ出力をする回路を, 問題 7.2 から選べ (論理回路として同じものを選べ).



7.2 チャートメソッド

問題 7.4 (色服組合せ問題)

3 組の男女のカップルがチークを踊っています．女の子はそれぞれ赤, 緑, 青の服を, 男の子たちも同じ 3 色の服を着ています．赤い服を着た男の子が, 別の男の子と踊っている緑の服を着た女の子に話しかけました.

「僕たちは誰も同じ色の服を着た相手とは踊っていないね.」

カップルの服の組合せはどうなっているのでしょうか.

	赤男	緑男	青男
赤女			
緑女			
青女			

問題 7.5 アパートに一緒に住んでいる 4 人の女子学生は 1 人はマニキュアをし, 1 人はパーマをし, もう 1 人は化粧をし, もう 1 人は本を読んでいます.

(1) マイラはマニキュアをしていないし, 読書もしていません.

(2) モードは化粧をしていないし, マニキュアもしていません.

(3) モナがマニキュアをしているならば, マイラは化粧をしています.

(4) メアリーは読書をしていないし, マニキュアもしていません.

(5) モナは読書もしていないし, 化粧もしていません.

4 人の女の子はそれぞれ何をしているのでしょうか?

	マニキュア	化粧	パーマ	読書
マイラ				
モード				
モナ				
メアリ				

問題 7.6 A, B, C, D の 4 人がかけっこをしました．その結果を 4 人の観客に聞くと, 彼らは次のように答えました．4 人とも本当のことを言っています．到着順を速い順に並べて答えよ.

観客 1: B は A より速かった.

観客 2: A か C のいずれかが 1 着だった.

観客 3: A か B のいずれかが 2 着だった.

観客 4: B か D のいずれかが 3 着だった.

	1 着	2 着	3 着	4 着
A				
B				
C				
D				

問題 7.7 あるクラスで, A, B, C, D, E の 5 人から 3 人の委員を選びました. 1 人は文化委員, もう 1 人は体育委員, 残りの 1 人は新聞委員です. ところで,

ア) A, B, C の 3 人のうち 2 人が委員に選ばれそのうち 1 人は文化委員でした.

イ) A, B, D の 3 人のうち 1 人が委員に選ばれその人は体育委員でした.

ウ) A, C, E の 3 人のうち 2 人が委員に選ばれそのうち 1 人は新聞委員でした.

では, それぞれ誰が選ばれましたか.

	A	B	C	D	E
文化					
体育					
新聞					

問題 7.8 (1995 年度 レクリエーション数学 前期試験問題)
A 〜 E は政治家, 作家, 教師, 弁護士, 医師のうちのいずれかの異なった職業である. 次のことがわかっているとき, A 〜 E の職業はそれぞれ何か.

ア) A は息子と作家の 3 人で昨日ゴルフをしたが, 政治家とは面識がない.

イ) B は E の娘と婚約をしている. 2 人は昨夜政治家夫妻に仲人の依頼に行った.

ウ) D 夫人には甥も姪もいない. 彼女の妹は医師の妻になっている.

エ) 弁護士の妻は, 入院中の夫の看護で最近は疲れている.

(注) 甥(おい) ＝兄弟姉妹の息子. 姪(めい) ＝兄弟姉妹の娘.

	A	B	C	D	E
政治家					
作家					
教師					
弁護士					
医師					

7.3　論理パズル

コロンダ警部が, カミさんと一緒に不思議な島に旅行した. その島の住人は, 正直族のナザレ人か, 嘘つき族のクレタ人のどちらかだという. ナザレ人たちはつねに真実だけをいうが, クレタ人たちはいつもうそ (真実とは違うこと) を言うそうである. しかも困ったことに, 顔を見ただけでは, ナザレ人かクレタ人かの判断はつかないのだ. ところが, この島の住人たちは誰も非常に論理的であって, よく熟慮した上で返事をしてくれるので, 同じように論理的思考力をもっているコロンダ警部にとって, この点は好都合なことであった.

コロンダ警部は次のような記号化を考えることにした.

(コロンダ警部の記号化)

$N(x)$　:　「住人 x はナザレ人（正直族）である.」

　　　　:　「住人 x はクレタ人（嘘つき族）である.」

コロンダ警部はエーゲ文明時代の幻の迷宮ラビュリントスを求めて, この島の空港に降り立ち, アリアドネホテルに行くため, タクシー乗場に行ったのである. そこには 2 台のタクシーが客待ちをしていて, 2 人の運転手がそこに立っていた. その 2 人のうち小柄なほうを a 氏, 大柄なほうを b 氏としよう.

例題　コロンダ警部は, 小柄な a 氏のほうに質問した.

「あなたがたおふたりは, ナザレ人ですか, クレタ人ですか.」

a 氏は

「私たちは 2 人ともクレタ人なのですよ」

と答えてくれた.

2 人のタクシー運転手の人種をそれぞれ考えよう. コロンダ警部は a 氏の発言を記号化して真偽表を作ってみた.

a 氏の発言の記号化 :

真偽表 :

1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

しかし, これだけでは 2 人の人種はわからない. コロンダ警部は次の定理を発見した.

定理 7 (島の住人言明定理)
島の住人 x が「P だ」と主張した. $\Leftrightarrow$
(「P か?」の質問に「はい」と答える)

Proof.

[1] x が P を主張. $\Rightarrow$ $N(x) \equiv P$

(i) x がナザレ人の場合.

(ii) x がクレタ人の場合.

[2] $N(x) \equiv P$ $\Rightarrow$ x が P を主張.

(i) x がナザレ人の場合.

(ii) x がクレタ人の場合.

この定理から成立する同値式は,

$$\equiv$$

真偽表を見直し, 左辺と右辺の真偽値が一致している箇所を探して,

a 氏は $\boxed{}$ 人, b 氏は $\boxed{}$ 人

とわかる.

コロンダ警部はアリアドネホテルのレストランで若い男女のカップルと同席した．男性のことを b 君, 女性のことを g さんと表すことにする．

問題 7.9 カップルの男性が

「僕たち 2 人のうちの少なくとも 1 人はクレタ人なんです」

と言っていた．この主張から 2 人の人種をそれぞれ答えよ．

男性の主張を記号化 ：

島の住人言明定理を適用 ：

真偽表作成 ：

1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

男性は $\boxed{}$ 人, 女性は $\boxed{}$ 人．

問題 7.10 コロンダ警部は, 伝説の王子テセウスが怪獣ミノタウルスを倒したというクノソスの丘がこの島にあるのではないかと考えていた．ホテルのロビーで知り合ったハンセン氏に

「この島にクノソスの丘があるかどうか知りたいのです」

と話しかけてみた．ハンセン氏がナザレ人であるかクレタ人であるかは不明である．しかし彼は笑みを浮かべながら答えてくれた．

「もし私がナザレ人だとしますと, クノソスの丘がこの島にあることが結論できるのですよ」

と．さて, ハンセン氏はナザレ人だろうか, クレタ人であろうか．また, この島にクノソスの丘はあるのだろうか．

ハンセン氏を h, 「この島にクノソスの丘がある」を K で表すことにする．

ハンセン氏の主張を記号化 ：

島の住人言明定理を適用 ：

真偽表作成 ：

1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

ハンセン氏は $\boxed{}$ 人, この島にクノソスの丘は $\boxed{}$．

問題 7.11 コロンダ警部が島に滞在中, ある事件に遭遇し, 島の警察に協力することになった. 捜査の結果, 容疑者としてアレン (a) とバラス (b) の 2 人が浮かび上がり, 犯人はこの 2 人の中にいることが判明した.

島のペッカー刑事 (p) はこの事件捜査の結果として次のように証言した.

① この事件はアレンかバラスの単独犯行である.

② もし, アレンが無罪なら, バラスも無罪となる.

ペッカー刑事も島の住人であるから, ナザレ人かクレタ人のどちらかで, 今のところそのどちらであるかはわからない.

ペッカー刑事はナザレ人かクレタ人か, また誰が犯人であるか答えよ. 記号化などは適宜行うこと.

1	**1**	**1**		
1	**1**	**0**		
1	**0**	**1**		
1	**0**	**0**		
0	**1**	**1**		
0	**1**	**0**		
0	**0**	**1**		
0	**0**	**0**		

ペッカー刑事は $\boxed{}$ 人, 犯人は $\boxed{}$.

問題 7.12 (1998 年度レクリエーション数学後期試験 改) 島の住人 c 氏, d 氏に出会った. いずれの人種も不明である. 次の各氏の発言からそれぞれの人種と, 迷宮ラビュリントスがこの島にあるか否か答えよ. ただし, 記号化などは適宜行うこと.

c 氏 「私たち二人ともクレタ人でこの島にはラビュリントスがある.」

d 氏 「私たちの少なくとも一方はクレタ人でこの島にはラビュリントスがない.」

1	**1**	**1**		
1	**1**	**0**		
1	**0**	**1**		
1	**0**	**0**		
0	**1**	**1**		
0	**1**	**0**		
0	**0**	**1**		
0	**0**	**0**		

c 氏は $\boxed{}$ 人, d 氏は $\boxed{}$ 人, この島にラビュリントスは $\boxed{}$.

7.4 推論

A ： (その人物は)Dr.Hener である． B ： (その人物は) 白衣を着ている．

とし,

「Dr.Hener は白衣を着ている (Dr.Hener であるならば白衣を着ている).」

を絶対的真理とする．

今, カーテン越しに (本物とわかっている) Dr.Hener が現れた．カーテンを開けるとそこには「白衣を着た人物」がいるはずである．この思考過程をまとめると ...

[推論 D] $A \to B$ (Dr.Hener ならば 白衣を着ている) が成り立っている所に, A (Dr.Hener が現れた) が成立した．このことから B (現れた人物は白衣を着ている) であると結論付ける．

この推論を次のように記号化する．

[推論 D] の記号化

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

定義 9 (推論規則) 命題 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ と B について,

「$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が正しいとすれば, それから B も正しいことがわかる」

こと, すなわち,

$$A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv A_n \equiv \mathbf{1} \quad \text{ならば} \quad B \equiv \mathbf{1}$$

という内容を次のように表し,「$A_1, A_2, \ldots, A_n$ から B を推論する」という．

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

ここで $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を**前提**, B を**結論** という．

では, **[推論 D]** は正しい推論と言えるだろうか？

定義 10 (正しい推論) 推論

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

自体が正しいのは次が成り立つときである．

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B \text{ が恒真である．}$$

問題 7.13 **[推論 D]** は正しい推論か？

A	B	
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

問題 7.14 次の推論は正しいか.

$$(1)\quad \frac{A \to \neg B}{B \to \neg A} \qquad (2)\quad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad (3)\quad \frac{A \to B \vee C}{A \to C} \qquad (4)\quad \frac{A \to B \wedge C}{A \to C}$$

A	B	
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

A	B	C	
1	**1**	**1**	
1	**1**	**0**	
1	**0**	**1**	
1	**0**	**0**	
0	**1**	**1**	
0	**1**	**0**	
0	**0**	**1**	
0	**0**	**0**	

A	B	C	
1	**1**	**1**	
1	**1**	**0**	
1	**0**	**1**	
1	**0**	**0**	
0	**1**	**1**	
0	**1**	**0**	
0	**0**	**1**	
0	**0**	**0**	

A	B	C	
1	**1**	**1**	
1	**1**	**0**	
1	**0**	**1**	
1	**0**	**0**	
0	**1**	**1**	
0	**1**	**0**	
0	**0**	**1**	
0	**0**	**0**	

問題 7.15

(1) 次の推論は正しいか？

① 「ある人物は白衣を着ていない.」ことと絶対的真理から
「その人物は Dr.Hener ではない.」
と推論する.

② 「ある人物は Dr.Hener ではない.」ことと絶対的真理から
「その人物は白衣を着ていない.」
と推論する.

(2) (発展) (1) の誤った推論について, 反例を示せ.

A	B	
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

A	B	
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

次の推論はいずれも正しいことがわかった.

$$\frac{A \to B \wedge C}{A \to C} \text{ 推論 1} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \text{ 推論 2}$$

では, 次の推論は正しいだろうか ?

$$\frac{A \to B \wedge C \quad C \to D}{A \to D}$$

$(A \to B \wedge C) \wedge (C \wedge D) \to (A \to D)$ が恒真かどうかを調べればよいが, 正しいとわかった推論だけを重ねて得られる推論は正しいから, 実はこの推論は正しいことが次のようにしてわかる.

$$\frac{\dfrac{A \to B \wedge C}{A \to C}\text{ 推論 1} \quad C \to D}{A \to D}\text{ 推論 2}$$

問題 7.16 次の命題 $A \sim C$ を真とする. これらから正しく推論できる命題はどれか.

(国家公務員試験 I)

A : 成績の良い人は人気が高い.

B : 勤勉な人は誠実であって, かつ, 成績が良い.

C : 人望のある人は人気が高くない.

- **ア.** 人望のある人は誠実である.
- **イ.** 人望のある人は勤勉でない.
- **ウ.** 勤勉でない人は人望がある.
- **エ.** 成績の良くない人は人望がある.
- **オ.** 誠実な人は人望がある.

考察

p : 成績がよい.　q : 人気が高い.　r : 勤勉である.　s : 誠実である.
t : 人望がある.

として, $A \sim C$ およびア〜オを記号化してみよ.

7.5　逆・裏・対偶

問題 7.17 (考察問題) 二人の気象予報士が, それぞれ次のような予報をした.

X 氏 :　明日, 寒くならなければ雪は降らない.
Y 氏 :　明日, 雪が降らなければ寒くならない.

命題 A, B を次のように定めるとき, 後の問に答えよ.

A :　明日, 雪が降る.
B :　明日, 寒くなる.

(1) X 氏, Y 氏の発言をそれぞれ A, B を用いて表せ.

X 氏の発言 :

Y 氏の発言 :

(2) X 氏, Y 氏の発言と同じ主張は次の内どれか. それぞれ選べ.

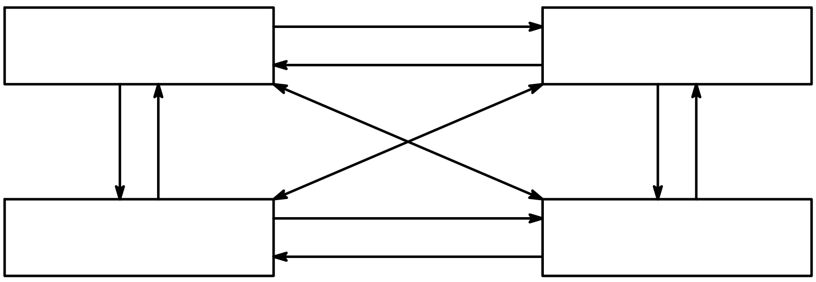
① 明日, 雪が降れば寒くなる.

② 明日, 寒くなれば雪が降る.

③ 明日, 雪は降らないが寒くなる.

「同じ主張」とは ...

A	B					
1	**1**					
1	**0**					
0	**1**					
0	**0**					



問題 7.18 次の命題 (1) 〜 (4) のうち「火のないところに煙は立たぬ.」という命題と同値な命題はどれか.

(1) 火があれば, かならず煙が立つ.

(2) 火がないのに, 煙が立っている.

(3) 煙が立っていれば, かならず火がある.

(4) 煙が立っていないのに, 火がある.

問題 7.19 次の命題の ① 逆, ② 裏, ③ 対偶 をそれぞれ作れ.

(1) 風吹けば桶屋が儲かる.

① 逆 :

② 裏 :

③ 対偶 :

(2) 愛があればチョコがもらえる.（1995 年度学生 : 遠藤あや さんの作品）

① 逆 :

② 裏 :

③ 対偶 :

問題 7.20 次の命題の対偶を作れ.(理解している ならば この問題は笑える !!)

(1) 平氏に非ずんば, 人に非ず.

(2) 授業をさぼれば, 単位をやらない.

(3) 腹がへると, 飯を食う.

(4) 叱られなければ, 勉強しない.

最後に · · ·　　**何のために学ぶのか.**

まもなく試験ですね. 試験に出て欲しくないところはどうすればいいでしょう?

試験に出るから勉強する.

付 録A　マジシャンの数学

A.1　2進数, パリティ

Magic 5 (絞り込みカード)

① カードを適当に (実は 16 枚) 伏せたまま並べる.

② 「その中から好きな 1 枚を選び, 選んだカードを見て覚えて下さい.」

③ その間に術者は残りのカードを揃えておく.

④ 「そのカードを私のカードの一番上に置いて下さい.」

⑤ 相手が置いたら揃えた残り (15 枚) のカードをその上にのせてしまう.

⑥ 「これであなたのカードはどこに行ったかよくわからなくなりましたね.」

⑦ 「更に難しくしましょう. この山の大体上半分を取って私に渡して下さい.」

⑧ 「今, 取った枚数は適当ですね. ここから変わった方法でカードを絞り込んでいきます.」

⑨ 術者は, 相手が取ったカードの山のトップカードを前につきだし, 2 枚目のカードを手前にずらし, 3 枚目のカードは前につきだし, $\cdots$ のように, 奇数枚目を前につきだし, 偶数枚目を手前にずらす.

⑩ 前につきだしたカード (奇数枚目) を全て抜き出して捨てる.

⑪ 残ったカードをまとめ, 同じ操作を繰り返す. このようにして最後の 1 枚が残るまで同じ操作を続ける.

⑫ 「ついに 1 枚のカードが残りました. あなたが最初に選んだカードは何でしたか?」

⑬ 最後の 1 枚を表向けると, それはまさに相手が選んだカードである.

問題 A.1 操作 ⑦ で相手が取るカードの枚数は, 実は全くデタラメでは, このマジックは失敗する. 相手が取る枚数が何枚から何枚の間なら, このマジックは成功するか.

Magic 6 (オイル＆ウォーター 1)

① 「カードの山から赤 10 枚, 黒 10 枚を出して下さい.」

② 「赤と黒を交互に混ぜます.」

(i) 赤黒それぞれの山からいちばん上のカードを両手で同時にとり, 裏向きにしたまま各々の山の手前へおく.

(ii) 次にまた同じことをするが, ただしこのときはカードをとったら手を交差させてから手前の新しい山の上におく. つまり赤いカードの上に黒いのを, 黒いカードの上に赤いのをおくことになる.

(iii) その次は手を交差させないでやり, その次はまた交差させてやる. これを最後まで繰り返す.

③ 「赤と黒が混ざっていますね.」ひと山 (10 枚) ずつ見せて混ざっていることを確認する.

④ 右の山を左の山の上に 1 つに重ねる.

⑤ 「一瞬のうちに, 赤と黒を分けましょう.」手に持ったカードの山を裏向きのまま左, 右の順に交互に 1 枚ずつ置いていく.

⑥ 「一瞬でしたね. (笑)」

⑦ 「今度はマジメにやります. もう一度赤と黒を混ぜます.」

(i) 左の山は左手にディーリングポジションで, 右は上からつかむようにして持つ.

(ii) 左手を返してボトムの黒を見せ, 手を戻してトップのカードを裏向きに置く.

(iii) 次に, 右手を返してボトムの赤を見せ, 手を戻してボトムのカードを置く.

(iv) 以降はボトムの色は見せないまま, “左手のトップ”, “右手のボトム” と交互に置いていく.

⑧ 「今度は指を鳴らすと, ホントに一瞬で赤と黒に分かれます.」指を鳴らしてカード全体を表向けて見せると, 赤と黒に 10 枚ずつ分かれている.

Magic 7 (オイル＆ウォーター 2) オイル＆ウォーター 1 に引き続き, 2 つの山を重ねていっしょにする. どちらが上でもかまわない.

① 上述の山をふせて扇状に広げる.

② 「この扇の中からどれでも好きなのを 10 枚, それぞれ少しずつ引き出して下さい.」

③ 「10 枚あるか確認しますよ.」1 から 10 まで数えながら右から順に 1 枚ずつ抜き出してはふせて重ねていって 1 つの山をつくる.

④ 左の手に広がったまま残った 10 枚もまとめてふせて 1 山とし, 最初の山のとなりへ並べておく.

⑤ 「10 枚のカードはデタラメに引き抜かれたものですよね. なのに, この 2 つの山のカードの色には, 驚くべき事態が起きています. 同じ枚数目のカードの色は必ず赤黒別々の色になっているのです.」

⑥ それぞれの山のトップカードから順に 1 枚ずつ同時にめくっていくと, 必ず一方は赤でもう一方は黒の組み合わせになっている.

Magic 8 (オイル＆ウォーター 3)　オイル＆ウォーター 2 の ⑥ で, 2 枚の赤黒の組み今わせを見せるとき, 必ず赤いカードを黒いカードの上に重ねることにする. それからふせて新しい 3 つ目の山をつくる. そうすれば終わったときには, このふせられた山のカードは赤と黒が 1 枚ずつ交互に入り混じっている. これでこのマジックの準備ができる.

① 上述の 20 枚のカードを誰かに渡す.

② 「次のような要領[1] でトランプを切り混ぜて下さい. 」

  (i) いちばん上の 2 枚をひっくり返し (1 枚ずつではなく 2 枚重ねたまま 1 度にひっくり返す), それらをいちばん上にのせて 20 枚のカードをカットする.
  (ii) この 2 枚ひっくり返してはカット, 2 枚ひっくり返してはカットという操作を相手の気のすむまで行う.

③ 「こうすれば 20 枚のうち何枚かが裏返しになって, 表裏がバラバラになりますね.」

④ 「今度は次のようにやって下さい.」

  (i) いちばん上のカードを 1 枚だけ下へ移す.
  (ii) 次のカードをめくってテーブルの上におく.
  (iii) この操作 — 1 枚を下へ移し, 次の 1 枚をめくっては出す — を 10 枚のカードがテーブル上に並ぶまでくり返す.

⑤ 「不思議なことが起こっているのがわかりますか. 表の出ているカードはみな同色であり, ふせられているカードはこれまたみな同色ですよ.」

⑥ 相手はまだ残り 10 枚のカードを持っている.

⑦ 「手にまだ残っている 10 枚を 2 つに分けて, そのままで完全にリフル・シャフルして下さい.」このときさっきテーブル上に並べた 10 枚を使ってやり方を実演してみせる.

⑧ それを数回やったらカード全部をまとめたままひっくり返してまた同じようなリフルシャフルを数回やらせる. (お望みとあらば念のためにそのあと 1 度カットさせてもよい.)

⑨ 「さっきと同じ操作をやってカードを並べてみて下さい.」すなわち, 1 枚を下へ移し, 次の 1 枚をひっくり返してテーブル上に並べていく.

⑩ 「最後の 1 枚はひっくリ返してそのままテーブルの上に出して下さい.」

⑪ 「どうです? あれほど完璧に切り混ぜたのに, 結果は最初の 10 枚のときと全く同様でしょ.」

[1] この切り方は手品で初めてこれを用いた奇術家 Bob Hummer にちなんでハマー・シャフルと呼ばれている.

問題 A.2 Magic 8 の ④ で行った, 1 枚を下へ移し, 次の 1 枚をテーブルに置く操作を, マジック用語で “アンダー・ダウン” という. 手持ちカードがある性質を持つ枚数に制限すると, アンダー・ダウンを繰り返した結果, 最後に残る 1 枚を元の手持ちカードのトップカードを残すことができる. 元の手持ちカードの枚数を何枚にしておけばよいか. また, ボトムカードを残すには, 何枚に制限しておけばよいか.

1	○
2	×

1	○×
2	×
3	○○

1	
2	
3	
4	

1	
2	
3	
4	
5	

1	
2	
3	
4	
5	
6	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

問題 A.3 アンダー・ダウンとは反対に, トップカードを先にテーブルに置き, 2 枚目をボトムに移し, 3 枚目をテーブルに置き, ··· という操作を “ダウン・アンダー” という. 問題 A.2 で制限した枚数を使うと, ダウン・アンダーを繰り返した場合, 最後に残る 1 枚は元の手持ちカードのどの位置のカードか.

1	×
2	○

1	×
2	○
3	×

1	
2	
3	
4	

1	
2	
3	
4	
5	

1	
2	
3	
4	
5	
6	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

A.2　代数

Magic 9 (電卓バースデー)

① 「あなたの誕生月を 4 倍して下さい.」

② 「その答に 9 を足して下さい.」

③ 「その答を 25 倍して下さい.」

④ 「その答にあなたの誕生日を足して下さい.」

⑤ 「その答は誕生日と全然違いますね? その数を教えて下さい. 」

術者はその数を聞いただけで瞬時に誕生日を当ててしまう.

問題 A.4 どうすれば誕生日を当てられるのか?

Magic 10 (マッチングカード)　スペードのカード 13 枚一組と ハートのカード 13 枚一組をそれぞれ揃えて山にする.

① 「どちらか好きな山を選んで下さい.」

② 「その中から好きなカードを 1 枚選んで, 表向きにテーブルに置いて下さい. 残りのカードは伏せてそのカードの手前に置いて下さい.」

③ 「私もあなたと同じ数字のカードを選びます.」術者もテーブルに相手と同じように, 選んだ表向きのカードの手前に残りのカードを伏せて置く.

④ 「私と同じように, 裏向きの山の半分くらいを持ち上げて下さい.」

⑤ 「私のカードをあなたの山のトップに裏向きに置いて, それを追いかけるように私の手に持ったカードを重ねてしまいます.」

⑥ 「あなたも同じように, 私の山のトップにあなたのカードを裏向きに置いて, それを追いかけるように手に持ったカードを重ねて下さい.」

⑦ 術者は一方の山を他方の山に重ねてひとつの山にしてしまう. 「これでお互いのカードはどこに行ったかよくわかりませんね.」

⑧ 「更に難しくしましょう.」カードを何回かカットする.

⑨ 「さて, もう一度 13 枚ずつの山に分けましょう.」術者はトップから順にテーブルにカードを裏向きのまま重ねて置いていく.

⑩ 「また好きな方の山を選んで, あなたは全体を表向きにして持って下さい.」

⑪ 「手に持ったカードを表向きのまま 1 枚ずつテーブルに置いていって下さい. 私は裏向きのまま同時に 1 枚ずつテーブルに置いていきます.」

⑫ 「あなたと私は運命のカードで結ばれています. あなたのカードと私のカードは同時に現れますよ.」二人のカードは同時に現れる.

問題 A.5 二人の運命を解明せよ.

Magic 11 (予知能力カード)

① カードを適当に (実は 12 枚) 並べる.

② 「その中から好きな 4 枚を選んで残りは揃えて下さい.」

③ 「残ったカードは山に戻して下さい.」

④ 「私は予言を書きます.」

⑤ 「カードの山を渡しますので, 絵札 (J, Q, K) は 10 として[2], カードの数字を足して 10 になる枚数を置いていって下さい. 10 以上の場合は置きません.」

⑥ 「4 枚のカードの数字を足した答と同じ枚数目のカードを, 残りの山から探して表向きにして下さい.」

⑦ 「そのカードが私が予言したカードです.」

問題 A.6 実は, ④ のとき, 術者は手に持ったボトムカードを書けばよいのであるが, 何故常にそのカードが選ばれるのか?

Magic 12 (不可解な予言)

① カードを適当に (実は 9 枚) 並べる.

② 「その中から好きな 1 枚を選んで残りは揃えて下さい.」

③ 「選んだカードを見て覚えたら, 揃えた残りのカードの上に戻して下さい.」更に, 術者は手持ちのカードをその山の上に重ねる.

④ 「カードの山を渡しますので, そのカードを 1 枚ずつ表を返しながら, 10, 9, 8, 7, $\cdots$ と逆順に声を出して 1 まで数えて下さい. その時にあなたが言う数とめくったカードの数が一致した時点で一端止めて, そこまでをひとつの山にしておいて下さい. もし, 全く一致しないまま 1 まで数えてしまったときには, その山を伏せてから, 手元のトップカードを伏せたまま山のトップに追加して, 残りのカードの上に戻して下さい. この操作を繰り返して下さい.」

⑤ 山が 4 つでき上がったら, 術者は操作を止めさせる.

⑥ 「今, 4 つの山ができましたね. 表向きに見えている山の数字を足してみましょう.」

⑦ 「足した答えと同じ枚数目のカードが, 先ほどあなたが選んだカードです.」

[2]絵札は 1 〜 10 までの任意の数としてよい.

Magic 13 (13 の不思議な力)

① ジョーカーを除いた 52 枚のトランプを用意.

② トップのカードを場に表向きに出し, そのカードの数から数えて 13 になるまで手持ちのカードを表向きに先ほど置いたカードに重ねていく.

③ ② の作業を手持ちのカードがなくなるまで繰り返す. そのとき, 最後の山が 13 に届かなかった場合は場からはずす.

④ 場の山を全て裏向ける.

⑤ 好きな山を 3 つ選んでもらい, 他の山は ③ の時に場からはずした山に重ね, それらを再び手持ちのカードとする.

⑥ 今, 3 つの山を選んだので, 4 から数えて 13 になるまで手持ちのカードから場に捨てていく (要するに 10 枚捨てる).

⑦ 3 つの山から 2 つの山を選び, それぞれのトップカードをめくる.

⑧ めくったトップカードと 同じ枚数 のカードを手持ちのカードから場に捨てる (選ばれた 2 つの山について同じことを行う).

⑨ 最後に手元に残ったカードの枚数が, 選ばれなかった残り 1 つの山のトップカードの数値に一致する.

問題 A.7 この謎を解明せよ.

Magic 14 (魔法の行列)

① 「1 〜 16 までを並べた 4 × 4 行列の中から好きな数字を選んで〇で囲んで下さい.」

② 「選んだ数の上下左右の数をセンを引いて消して下さい.」

③ 「まだ消えていない数の中から好きな数字をひとつ, また〇で囲んで下さい.」

④ 「先ほどと同様に上下左右の数を消して下さい.」

⑤ 「第三の数も同様に選んで上下左右の数を消して下さい.」

⑥ 「1 つの数が残りますが, この運命の数も〇で囲んで下さい.」

⑦ 「〇で囲んだ 4 つの数を足して下さい.」

⑧ 「その答をテレパシーで私に送って下さい. $\cdots$
おお, その答は 34 ですね.」

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

問題 A.8 この謎を解明し, 最後の答が指定の数になるように行列を作成せよ.

Magic 15 (日付合計数の予言) Magic 14 のバリエーションである.

① 術者はカレンダーを渡す.

② 「好きな月を選んで, そのカレンダーの中の正方形に並んだ 16 個の日付を枠で囲んで下さい.」

③ 「私は予言を紙に書きます.」

④ 「その枠で囲んだ日付の中から, 好きな数字を選んで○を付けて下さい.」

⑤ 「選んだ数の上下左右の数をセンを引いて消して下さい.」

⑥ 「まだ消えていない数の中から好きな数字をひとつ, また○を付けて下さい.」

⑦ 「先ほどと同様に上下左右の数を消して下さい.」

⑧ 「第三の数も同様に選んで上下左右の数を消して下さい.」

⑨ 「1 つの数が残りますが, この運命の数も○で囲んで下さい.」

⑩ 「○で囲んだ 4 つの数を足して下さい. その答はいくつですか?」

⑪ 予言を書いた紙を開けてみると, ピタリと一致している.

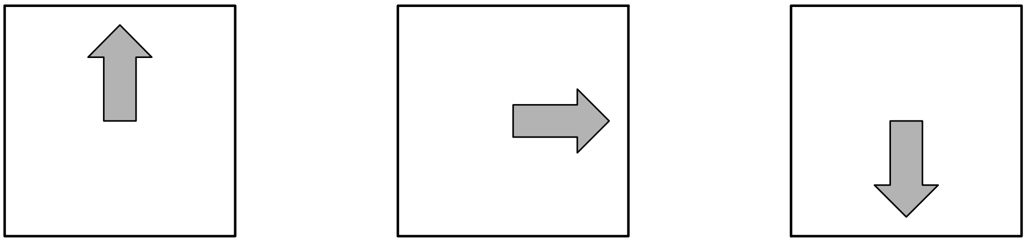
2005 年 3 月

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

問題 A.9 どんな予言をしておけばよいのか.

A.3　その他

Magic 16 (いま, 何時?)



① 「これを時計だと思って下さい．今, 12 時ですね.」

② 「表が 3 時になると裏も 3 時です.」

③ 「では, 表が 6 時になると, 裏は?」

表の時刻が変わるたび, 当てる人が変わるたび, 裏の時刻は当たったりはずれたり.⋯??

Magic 17 (バミューダトライアングル)

① 「ここは魔の海域, バミューダトライアングルです．船や飛行機がたくさん沈んでいます.」

② 「三角形のどの辺も 7 個ずつですね.」(図 A.1)

③ 「ここへまた船が来ました．すると, 嵐が来て船が沈んでしまいました.」(図 A.2)

④ 「ところが, 嵐が過ぎ去ると, 三角形のどの辺も元通り 7 個ずつになっています! 1 つ増えたはずなのに!!」(図 A.3)

⑤ 「今度は飛行機が来ました．またもや, 嵐が来て飛行機は海に沈んでしまいました.」(図 A.4)

⑥ 「ところが, 嵐が過ぎ去ると, 三角形のどの辺もまた元通り 7 個ずつになっています! 1 つ増えたはずなのに!!」(図 A.5)

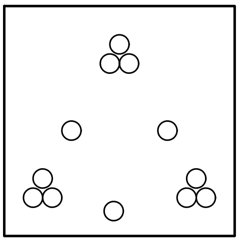


図 A.1

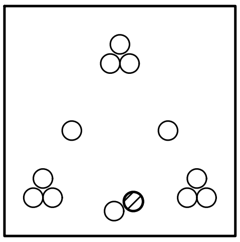


図 A.2

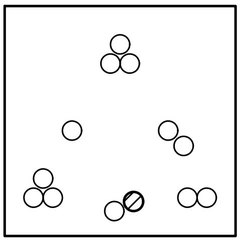


図 A.3

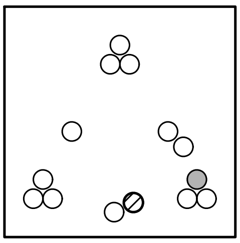


図 A.4

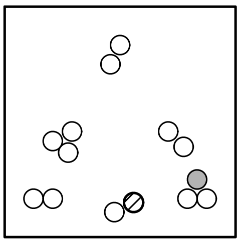


図 A.5

Magic 18 (大阪環状線マジック)

① 「大阪環状線に合流する神戸線の駅を自由に追加して下さい.」

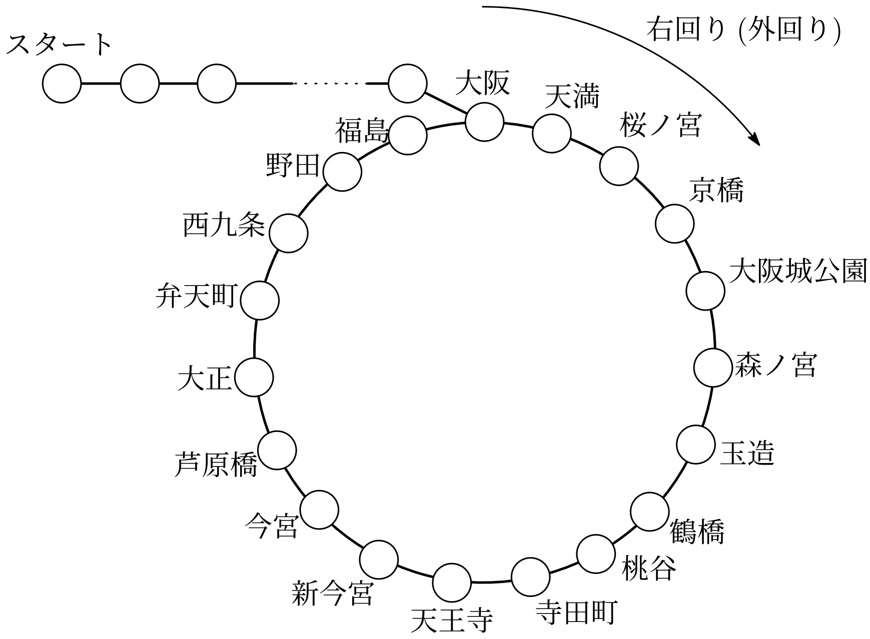
② 「数字をひとつ思い浮かべて下さい.」

③ 「神戸線上のスタート駅 (の次) から数えて, その数字の数だけ進んで大阪環状線に入って下さい. 環状線は右回り (外回り) にまわり, もし大阪駅に戻っても神戸線には出て行かないようにして下さい.」

④ 大阪環状線上の駅に止まったら, 神戸線は混乱を避けるために消す.

⑤ 「今度は, はじめに思い浮かべた数だけ 左回り (内回り) に駅をたどって下さい.」

⑥ たどり着いた駅名をズバリと当てる.



Magic 19 (紙コップの透視術)

① 紙コップを 3 個取り, 並べる.

② 「私が後ろを向いている間に, 紙コップをひとつ選んでその中にお金を入れて下さい.」

③ 「お金の入っていない紙コップを入れ替えて下さい.」

④ 術者は向き直り, 「透視しますよ ⋯. お金の入っているのは, これですね!」と, ズバリ言い当てる.

問題 A.10 紙コップのひとつには印が付けてある. では, そのキーとなるコップをどの位置に置けば, どのように当てることができるか.

Magic 20 (赤いカードを選ぶ)

① 準備した 6 枚のカードを表裏交互に並べる.

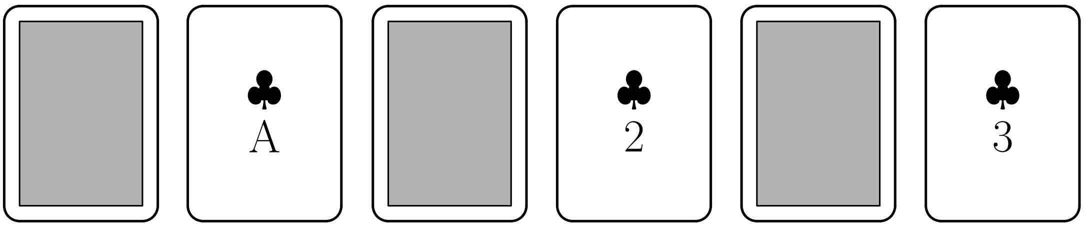
② 予言の紙を示して, 「ここに予言が書いてあります. 変更できないように, 見えるところに置いておきましょう.」

③ 「さて, サイコロを振ってあなたのカードを決めましょう.」

④ 相手にサイコロを振ってもらい, 出た目に従って 1 枚のカードを選ぶ.

⑤ 「では, 予言を読んで下さい. 」(予言には, “あなたは赤いカードを選ぶ” と書かれている.)

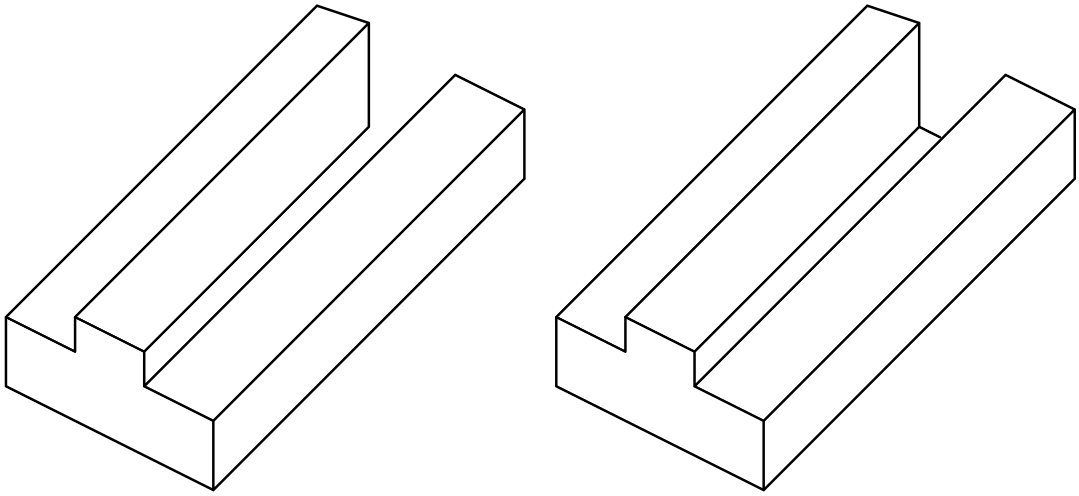
⑥ 「あなたのカードは 6 枚のうち, たった 1 枚の赤いカードです!」



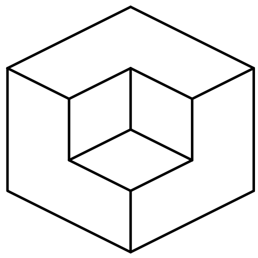
付 録B　トリックアート入門

B.1　だまし絵の分析

有名なだまし絵 2 作品



正しい立体では, つながり方は 3 通り



1. 両側の面が見えていて山の尾根のように出っ張ってつながっている線.
2. 両側の面が見えていて谷のように引っ込んでつながっている線.
3. つながっている面の 1 つが裏側に回り込んで見えなくなっている線.

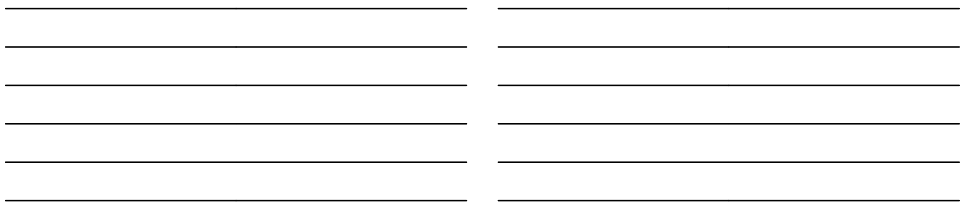
B.2 だまし絵の作成

作り方

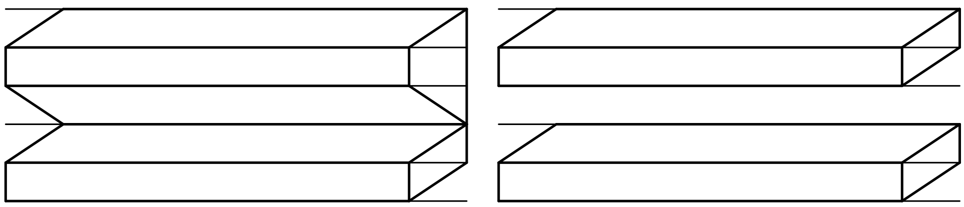
(1) 6 本の線分を基に 2 種類以上の立体を描く.

(2) 右半分と左半分を入れ替える.

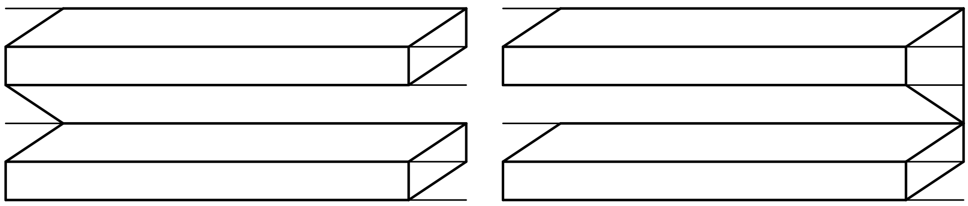
- 基準線 6 本.



- 2 種類以上の立体を描く.

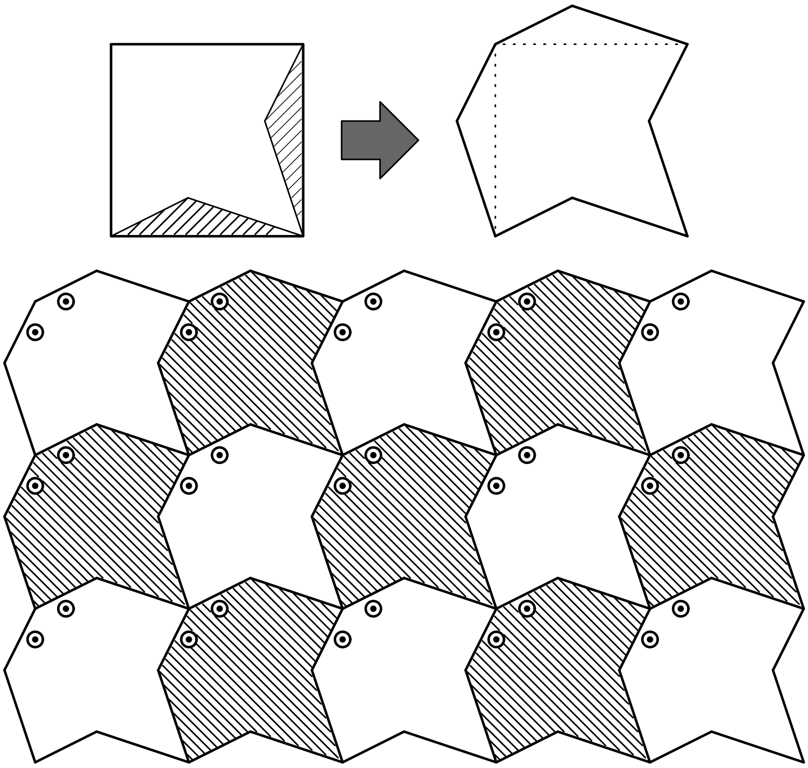


- 左右を入れ替える.

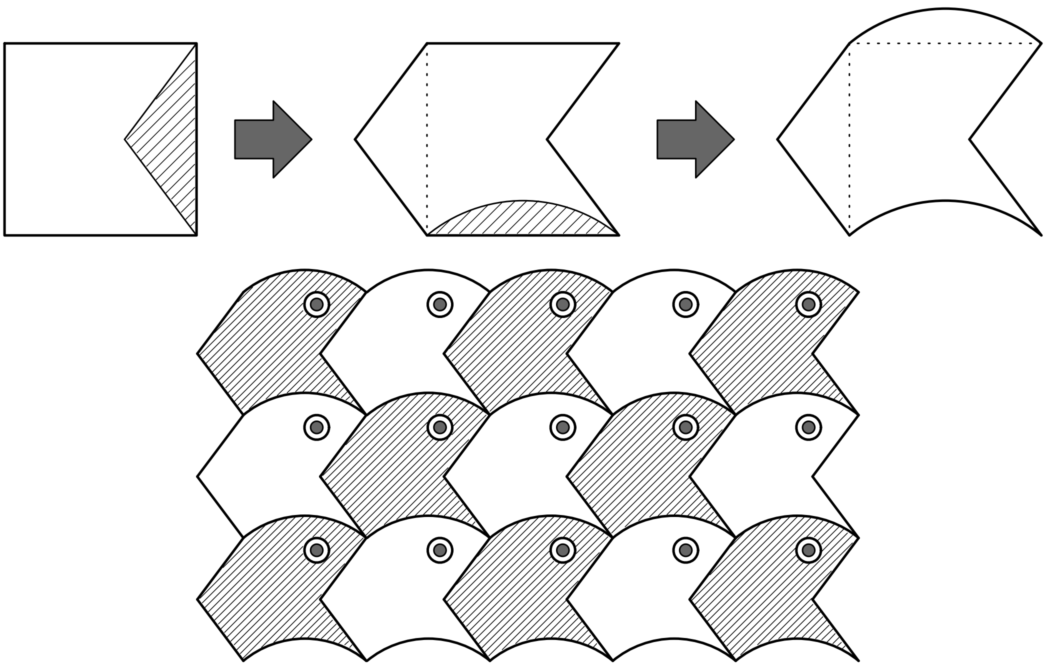


注意 運が悪いとちっともおかしくない普通の絵になってしまう.

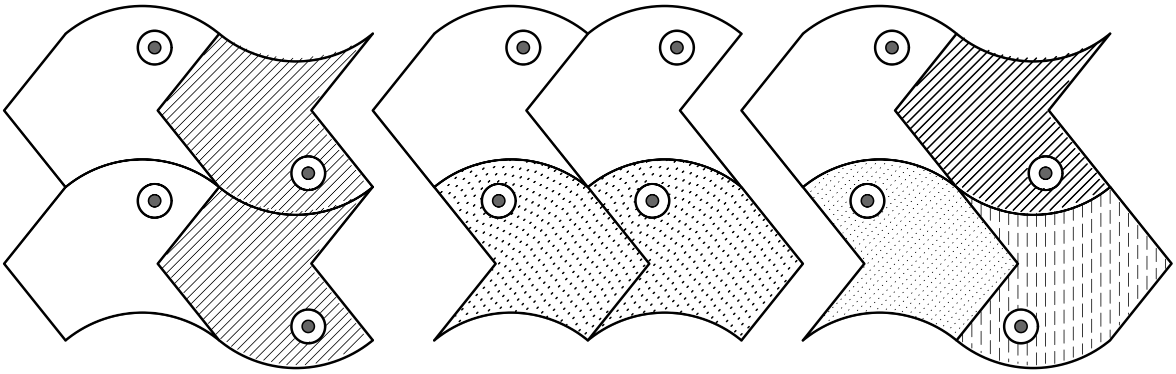
B.3　敷き詰め図形



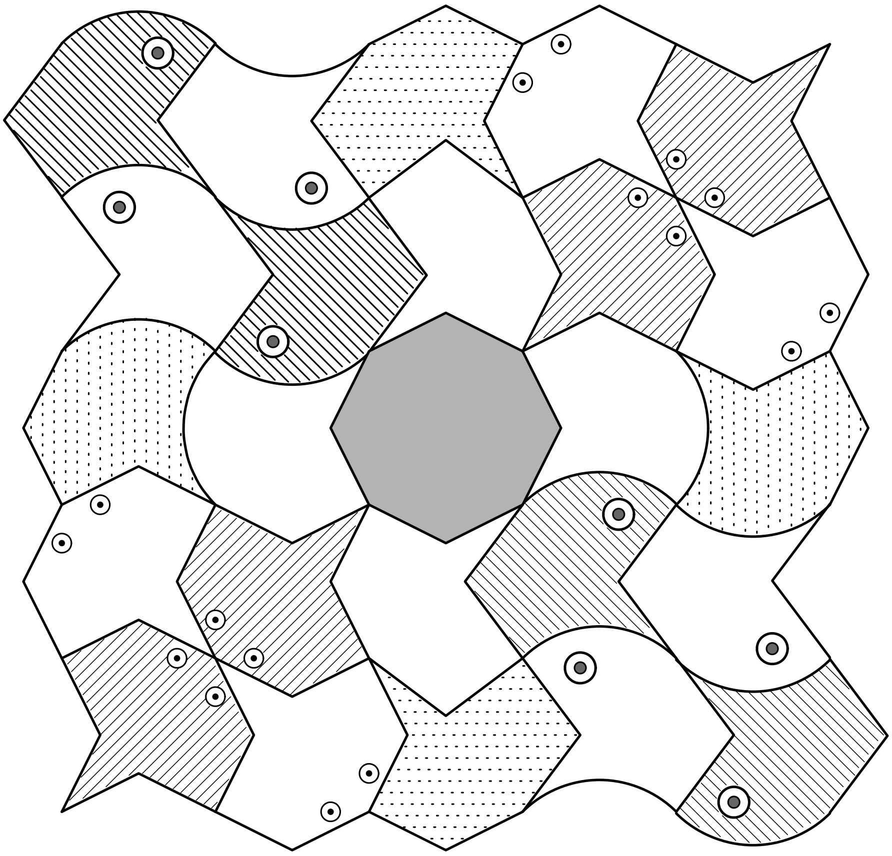
カレイの敷き詰め



ヘビの敷き詰め

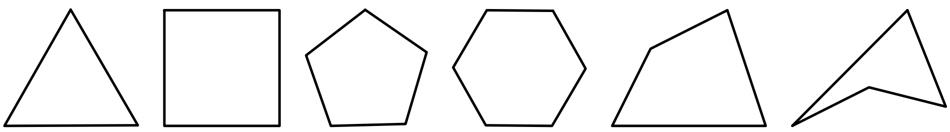


ヘビの敷き詰めバリエーション



ヘビのカレイなるメタモルフォーゼ

問題 B.1 (敷き詰め図形) 次の図形の内, 平面を敷き詰められないものはどれか.



あとがき

平井先生と Hener は同一人物ではないか, とよく質問されます. いいえと答えると, 決まって一緒に現れてほしい, と頼まれます. そんなことを頼まれてもお断りです. 一緒には現れたくないからです. すると, やっぱり同一人物なんだと結論づける学生が多いですが, それは早合点というもの. こういう場合, どうすればいいのでしょうか.

ところで,「同じ人物」を定義づけるのも至難の業です. 何故なら, 今日のあなたと明日のあなたでは髪の毛や爪も伸びているでしょうし, お腹の空き具合も異なるように, 生物は刻々と変化していますから常に同じ物体であるとは言えないからです. 従って,「同じ個体」の定義だって難しいわけです. こう考えると, 同一人物かどうかを識別する方法なんてないのでしょうか.

いえ, 何年か前の学生が気づいた簡単な方法があります. それはマーキングという方法です. 昨年飛んできた渡り鳥と今年飛んできた渡り鳥が同じ個体であるかどうかを調べるマーキング調査を応用する, というわけです.

何気ない日常にも考え方一つで難しくなったり容易になったりするものですね. これがヒラメキ思考です. 皆さんの日常や将来の仕事場でこうしたヒラメキ思考を大いに活用されることを期待します.

著者 紹介
Albert Kurt Hener (Dr.Hener)
hener@cong.ac.jp
God Door university graduate course 修了
物知り博士

平井崇晴
takaharu.hirai@nifty.ne.jp
神戸大学大学院自然科学研究科 修了
理学博士